



Universidade Estadual de Feira de Santana  
Departamento de Física

DANIEL MEDEIROS REIS

**Procedimento de Regularização na Eletrodinâmica Quântica**

TRABALHO ACADÊMICO DE FINAL DE CURSO

FEIRA DE SANTANA, BA

AGOSTO DE 2014

DANIEL MEDEIROS REIS

## Procedimento de Regularização na Eletrodinâmica Quântica

*Trabalho apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Feira de Santana como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Física.*

Orientador:

*Prof.Dr. Franz Peter Alves Farias*

FEIRA DE SANTANA, BA

AGOSTO DE 2014

DANIEL MEDEIROS REIS

## Procedimento de Regularização na Eletrodinâmica Quântica

*Trabalho apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Feira de Santana como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Física.*

Data de aprovação: \_\_\_ / \_\_\_ / \_\_\_\_\_

### BANCA EXAMINADORA

---

*Prof. Dr. Franz Peter Alves Farias*

Departamento de Física - UEFS

---

*Prof. Dr. Carlos Alberto de Lima Ribeiro*

Departamento de Física - UEFS

---

*Prof. Dr. Alexandre Leite Gadelha*

Instituto de Física - UFBA

# Agradecimentos

Agradeço à minha família por sempre estar ao meu lado e me apoiar em todas as minhas decisões. Ao professor Franz Peter que me orientou neste dois últimos anos e na conclusão deste trabalho. A todo o pessoal do Fiscampus. A Fapesb e a UEFS pelo apoio financeiro. E não poderia deixar agradecer a Letruska, pela paciência, compreensão e todo o apoio. E a todos aqueles que contribuíram para a minha formação e me apoiaram de alguma forma.

# Resumo

Neste trabalho apresentamos alguns elementos da Eletrodinâmica Quântica (QED), que trata da interação do campo de Dirac e o campo eletromagnético, e cuja solução perturbativa leva a integrais divergentes nas correções radiativas aos processos de espalhamento. Mostramos como esta divergência surge no processo representado pelo diagrama de polarização de vácuo, que realiza uma correção radiativa no propagador do fóton. Para o tratamento destes infinitos foram abordados dois métodos de regularização, o método de Pauli-Villars e o Dimensional.

# Abstract

In this present work we show some aspects of Quantum Electrodynamics (QED) which leads with the interaction of Dirac and the electromagnetic fields, whose perturbative solution leads to divergent integrals in the radiative corrections from the scattering process. We show how these infinities arise on the process represented by the vacuum polarization diagram, which makes a radiative correction on photon propagator. We use two procedures for the treatment of these infinities, the Pauli-Villars Regularization and the Dimensional Regularization.

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>i</b>
<b>Resumo</b>	<b>ii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>vi</b>
<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>1 Quantização canônica do campo de Dirac e o campo eletromagnético</b>	<b>3</b>
1.1 O campo de Dirac . . . . .	3
1.2 O campo eletromagnético . . . . .	8
1.2.1 As equações de Maxwell . . . . .	8
1.2.2 Quantização via calibre de Coulomb . . . . .	10
1.2.3 Quantização via calibre de Lorentz . . . . .	12
<b>2 Tópicos básicos na eletrodinâmica quântica</b>	<b>16</b>
2.1 A lagrangeana da QED . . . . .	16
2.2 A expansão perturbativa da Matriz-S . . . . .	18
2.3 Processos na QED em mais baixas ordens . . . . .	23
<b>3 Regularização e Renormalização na QED</b>	<b>29</b>
3.1 Introdução aos métodos de regularização . . . . .	29
3.2 Polarização de Vácuo . . . . .	30
3.3 Regularização de Pauli-Villars . . . . .	33
3.4 Renormalização da Carga Elétrica . . . . .	38
3.5 Regularização Dimensional . . . . .	40
3.5.1 Introdução . . . . .	40
3.5.2 Tensor de polarização de vácuo . . . . .	41

<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>45</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>47</b>
<b>A Matrizes de Dirac</b>	<b>49</b>
<b>B Integrais em D-dimensões</b>	<b>52</b>



# Lista de Figuras

2.1	Diagrama de Feynman para o propagador $iS_F(p)$ do elétron de momento $p$ , com a linha do tempo da esquerda para a direita. . . . .	22
2.2	Diagrama de Feynman para o propagador $iD_F^{\mu\nu}(k)$ do fóton de momento $k$ . . . . .	23
2.3	Diagrama de Feynman para um processo em primeira ordem na matriz S. . . . .	24
2.4	Diagrama de Feynman para o espalhamento Compton. . . . .	25
2.5	Diagrama de Feynman para o espalhamento Bhabha, explicitando os termos que surgirão na amplitude $\mathcal{M}$ , correspondente a cada linha interna, externa e os vértices. . . . .	26
2.6	Correções radiativas de segunda ordem para o férmion e o fóton. . . . .	27
3.1	Correção radiativa em mais baixa ordem no propagador do fóton. . . . .	30
3.2	Correções radiativas no propagador do fóton . . . . .	31
3.3	Interação de um elétron com um potencial externo. . . . .	32
3.4	Espalhamento Möller com a correção radiativa de ordem mais baixa ao propagador do fóton . . . . .	38

# INTRODUÇÃO

A Física no início do século XX sofreu uma grande mudança de paradigma com o desenvolvimento da Mecânica Quântica e da Relatividade restrita. A Mecânica Quântica responsável pela descrição de sistemas na escala atômica, abandonava a forma determinista da Mecânica Newtoniana, e previa corretamente fenômenos até então inexplicados, como a radiação do corpo negro.

Já a teoria da relatividade restrita desenvolvida por Albert Einstein, descreve a mecânica no regime de altas velocidades. Para isso, Einstein postulou que as leis da Física devem ser as mesmas em relação aos referenciais inerciais e a velocidade da luz é uma constante, e independente do movimento da fonte.

A aplicação conjunta da mecânica quântica com a relatividade restrita se deu por meio da Teoria Quântica de Campos (TQC), que lida essencialmente com a necessidade de trabalhar com uma quantidade variável de partículas, devido criação e aniquilação de partículas na escala de altas energias. A teoria de campos fornece uma linguagem adequada para a descrição destes sistemas, por ser uma entidade que lida com infinitos graus de liberdade.

A TQC consegue descrever 3 das 4 interações fundamentais da natureza, a eletromagnética e as forças nucleares forte e fraca, sem conseguir incluir a gravitação. Dentro da TQC temos a Eletrodinâmica Quântica (QED), que é a teoria física responsável pela descrição da interação do campo de Maxwell (fóton) com o campo de Dirac (elétron e pósitron).

Apesar do relativo sucesso da QED, a mesma apresentava uma dificuldade no cálculo das correções radiativas advindas da solução perturbativa via Matriz-S, resultando em divergências, que não possuem significado físico para as quantidades observáveis, como nas amplitudes de transição dos processos de espalhamento, seção de choque e a energia.

A solução encontrada para separar a solução finita nas correções radiativas foi dado por um procedimento chamado de Regularização, que são técnicas matemáticas onde as

integrais divergentes são modificadas adequadamente para apresentar um comportamento convergente. Com isto, estes infinitos são eliminados por um esquema de Renormalização, feito inicialmente por Dyson [1] em 1949, e depois por outros como Feynman, Schwinger e Tomonaga [2] [3], nos quais as divergências são absorvidas em quantidades físicas que passam a ser redefinidas a exemplo da massa da carga do elétron.

No primeiro capítulo deste trabalho fazemos uma revisão no processo de quantização canônica do campo de Dirac, responsável pela descrição do elétron e pósitron e, em seguida, da quantização do campo eletromagnético, cuja excitação elementar é o fóton.

No segundo capítulo mostramos alguns elementos da QED, como a obtenção da lagrangiana da QED por meio da exigência de calibre local na lagrangiana de Dirac. Obtemos a solução perturbativa via Matriz-S, exemplificando as correções radiativas em alguns processos de espalhamento e ao fim mostramos como as correções radiativas no propagador do fóton (polarização de vácuo) e no propagador do elétron (auto-energia do fóton) fazem surgir integrais que são divergentes, tornando necessário a utilização dos métodos de regularização.

No capítulo 3 mostramos como é possível regularizar a integral divergente associado ao diagrama de polarização de vácuo, utilizando duas diferentes abordagens de regularização. Iniciamos com o método de Pauli-Villars, cuja técnica consiste na introdução de um campo auxiliar massivo chamado regulador, e depois realizamos o procedimento de renormalização, obtendo a carga elétrica renormalizada. E, por fim, mostramos o método da Regularização Dimensional, cuja técnica consiste em alterar a dimensão das integrais divergentes para um valor  $D$ , de forma a integral seja convergente.

Procedemos com as considerações e perspectivas de possíveis aplicações dos métodos de regularização na física.

# Quantização canônica do campo de Dirac e o campo eletromagnético

Neste capítulo abordamos a quantização do campo de Dirac, cujas excitações elementares são o elétron e o pósitron. Depois quantizamos o campo de Maxwell, responsável pela descrição do fóton. Seguimos o processo de quantização canônica.

## 1.1 O campo de Dirac

O tratamento adequado para a descrição quântico-relativística de uma partícula se deu por meio da equação de Dirac [4], que incorpora a característica espinorial do elétron e permite a interpretação de uma densidade de probabilidade positiva para o quadrado da função de onda correspondente. Porém, o conjunto de suas soluções apresentavam um problema por permitir estados de energia negativa. A solução de Dirac se deu pelo fato de que elétrons possuem spin  $\frac{1}{2}$  e obedecem o *princípio de exclusão* de Pauli, e portanto, todos os infinitos estados de energia negativa passam a ser ocupados por uma partícula, isso ficou conhecido como o mar de Dirac. Porém, quando estas partículas passam a interagir, ocorrendo a transição de um estado de energia negativa para um estado de energia positiva, o estado que antes era ocupado acaba se tornando um buraco, com características iguais ao do elétron, porém com carga oposta.

Essa análise levou a predição da anti-partícula do elétron, chamado pósitron, e portanto, a equação de Dirac deve ser entendida como uma equação para um campo de infinitas partículas. Logo, a forma de tratar isto se deu por meio de um campo de elétrons e pósitrons quantizados.

Assim, para o tratamento adequado da quantização do campo de Dirac, inicialmente partimos da formulação lagrangeana de campos [5] de forma que a densidade de lagrangiana de Dirac é expressa como,

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x), \quad (1.1)$$

onde  $\psi(x)$  e  $\bar{\psi}(x) = \gamma^0 \psi^\dagger(x)$  é o campo de Dirac e o seu conjugado,  $\gamma^\mu$  são as matrizes de Dirac (Apêndice A) e  $m$  é a massa do elétron. De (1.1), o momento canonicamente conjugado é

$$\pi_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi)} = i\psi^\dagger. \quad (1.2)$$

No processo de quantização, estes campos devem satisfazer uma relação de anti-comutação, devido à própria natureza do campo de Dirac, por se tratar de partículas de spin 1/2 (Férmions)[4] e, portanto devem satisfazer a estatística de Fermi-Dirac, logo impomos que,

$$\{\psi_a(x), \psi_b^\dagger(x')\} = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta_{ab}, \quad (1.3)$$

com  $a, b = 1, \dots, 4$ .

Escrevendo o campo de Dirac como uma expansão de Fourier, temos,

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2p_0}} \sum_{s=1,2} [a_s(\mathbf{p}) u^{(s)}(\mathbf{p}) e^{-ipx} + b_s^\dagger(\mathbf{p}) v^{(s)}(\mathbf{p}) e^{ipx}], \quad (1.4)$$

$$\psi^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2p_0}} \sum_{s=1,2} [a_s^\dagger(\mathbf{p}) u^{(s)}(\mathbf{p}) e^{ipx} + b_s(\mathbf{p}) v^{(s)}(\mathbf{p}) e^{-ipx}], \quad (1.5)$$

onde  $u^{(1,2)}(\mathbf{p})$  e  $v^{(1,2)}(\mathbf{p})$  envolve as energias de cada componente do spin do férmion (+1/2, -1/2),  $a_s$  é o operador aniquilação para a partícula em questão e  $b_s^\dagger$  é o operador de criação para a sua respectiva antipartícula. Em decorrência da eq.(1.3), estes operadores satisfazem as relações de anticomutação,

$$\{a_{\mathbf{p}}^s, a_{\mathbf{p}'}^{s'\dagger}\} = \{b_{\mathbf{p}}^s, b_{\mathbf{p}'}^{s'\dagger}\} = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta^{ss'}, \quad (1.6)$$

$$\{a_{\mathbf{p}}^s, a_{\mathbf{p}'}^{s'}\} = \{b_{\mathbf{p}}^s, b_{\mathbf{p}'}^{s'}\} = 0, \quad (1.7)$$

$$\left\{ a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}, a_{\mathbf{p}'}^{s'\dagger} \right\} = \left\{ b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}, b_{\mathbf{p}'}^{s'\dagger} \right\} = 0. \quad (1.8)$$

A passagem da lagrangeana para a Hamiltoniana é conseguida da transformação:

$$H = \int d^3x \cdot \mathcal{H} = \int d^3x (\pi_\psi \partial_0 \psi - \mathcal{L}). \quad (1.9)$$

Assim,

$$H = i \int d^3x \psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (1.10)$$

Obtemos o operador hamiltoninano

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} m \sum_{s=1,2} \left[ a_s^\dagger(\mathbf{p}) a_s(\mathbf{p}) + b_s(\mathbf{p}) b_s^\dagger(\mathbf{p}) \right]. \quad (1.11)$$

Devemos observar como os operadores de criação  $a_s^\dagger, b_s^\dagger$  e de aniquilação  $a_s, b_s$  atuam sobre o estado de um campo, cujos estados são de uma classe específica do espaço de Hilbert, chamado de espaço de Fock.

A representação de Fock determina que exista um estado de vácuo, e que ao aplicar o operador de aniquilação nesse estado, resulte em um estado nulo, com ausência de partículas, i.e.,  $a_s(\mathbf{p})|0\rangle = 0$ , e que os estados do sistema possam ser representados a partir desse estado de vácuo, por meio de sucessivas aplicações do operador de criação num estado genérico, como segue

$$|\mathbf{p}_1^{(s_1)}, \dots, \mathbf{p}_n^{(s_n)}\rangle = \beta a_{s_1}^\dagger(\mathbf{p}_1) \dots a_{s_n}^\dagger(\mathbf{p}_n) |0\rangle, \quad (1.12)$$

onde  $\beta$  é uma constante.

Com a relação de anticomutação (1.8), o estado de duas partículas satisfaz a

$$|\mathbf{p}_1^{(s_1)}, \mathbf{p}_2^{(s_2)}\rangle \equiv a_{s_1}^\dagger(\mathbf{p}_1) a_{s_2}^\dagger(\mathbf{p}_2) |0\rangle = -|\mathbf{p}_2^{(s_2)}, \mathbf{p}_1^{(s_1)}\rangle. \quad (1.13)$$

Desta forma, a estatística de Fermi-Dirac é satisfeita e o princípio de Exclusão de Pauli acarreta em  $|\mathbf{p}^{(s)}, \mathbf{p}^{(s)}\rangle = 0$ , ou seja, não pode haver duas partículas com mesmo estado quântico.

Se definimos agora os operadores  $N_a(p) = a_s^\dagger(\mathbf{p}) a_s(\mathbf{p})$  e  $N_b(p) = b_s^\dagger(\mathbf{p}) b_s(\mathbf{p})$ , os autoes-

tados e autovalores desses operadores podem ser expressos como,

$$N(p)|n(p)\rangle = n(p)|n(p)\rangle. \quad (1.14)$$

Por meio das relações de comutação em (1.6), obtemos

$$N_a(p)a_s^\dagger|n(p)\rangle = [n(p) + 1]a_s^\dagger|n(p)\rangle, \quad (1.15)$$

$$N_a(p)a_s|n(p)\rangle = [n(p) - 1]a_s|n(p)\rangle, \quad (1.16)$$

com os mesmo resultados obtidos para em  $N_b(p)$ . O resultado acima diz que, se o estado  $|n(p)\rangle$  tem autovalor  $n(p)$ , logo os estados  $a_s^\dagger|n(p)\rangle$  e  $a_s|n(p)\rangle$  são autoestados de  $N_a(p)$ , com autovalores  $(n(p) + 1)$  e  $(n(p) - 1)$ . Portanto, o operador criação cria a partícula de momento  $p$  e o de aniquilação destrói. Porém, ao aplicar o operador hamiltoniano (1.11) no estado de vácuo  $|0\rangle$ , obtemos

$$\begin{aligned} H|0\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} m \sum_{s=1,2} \left[ a_s^\dagger(\mathbf{p})a_s(\mathbf{p})|0\rangle + b_s(\mathbf{p})b_s^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle \right], \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} m \sum_{s=1,2} b_s(\mathbf{p})b_s^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.17)$$

O operador de aniquilação  $a_s(\mathbf{p})$  destrói o estado de vácuo, porém o operador de criação  $a_s^\dagger(\mathbf{p})$  cria infinitas partículas, ocasionando uma energia infinita, que não tem sentido físico no momento. Para resolver este problema é necessário realizar um ordenamento normal (Ordenamento de Wick) de forma que os operadores de aniquilação sempre fiquem a direita dos de criação. De (1.6) temos,

$$\left\{ a_{\mathbf{p}}^s, a_{\mathbf{p}'}^{s'\dagger} \right\} = \left\{ b_{\mathbf{p}}^s, b_{\mathbf{p}'}^{s'\dagger} \right\} = (2\pi)^3 \delta^3(0) \delta^{ss'}, \quad (1.18)$$

logo,

$$a_s(\mathbf{p})a_s^\dagger(\mathbf{p}) = a_s^\dagger(\mathbf{p})a_s(\mathbf{p}) - (2\pi)^3 \delta^3(0), \quad (1.19)$$

$$b_s(\mathbf{p})b_s^\dagger(\mathbf{p}) = b_s^\dagger(\mathbf{p})b_s(\mathbf{p}) - (2\pi)^3 \delta^3(0). \quad (1.20)$$

O termo  $\delta^3(0)$  tende a infinito, porém não será incluído no operador ordenado. Assim

o operador hamiltoniano ordenado ( $:H:$ ) torna-se,

$$\begin{aligned} :H: &:= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} m \sum_{s=1,2} \left[ a_s^\dagger(\mathbf{p}) a_s(\mathbf{p}) + b_s^\dagger(\mathbf{p}) b_s(\mathbf{p}) \right], \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} m \sum_{s=1,2} \left[ N_a^{(s)}(p) + N_b^{(s)}(p) \right], \end{aligned} \quad (1.21)$$

que satisfaz  $:H:|0\rangle = 0$ .

O operador carga é obtido de

$$Q = -e \int d^3x : j^0(x) : = -e \int d^3x : \psi^\dagger(x) \psi(x) :, \quad (1.22)$$

onde o termo  $::$  significa o ordenamento normal. Substituindo a equação (1.4) e (1.5) no operador Carga, obtemos,

$$Q = -e \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{p^0} \sum_{s=1,2} \left[ a_s^\dagger(\mathbf{p}) a_s(\mathbf{p}) - b_s^\dagger(\mathbf{p}) b_s(\mathbf{p}) \right]. \quad (1.23)$$

ou em termos dos operadores  $N_a^{(s)}(p)$  e  $N_b^{(s)}(p)$ ,

$$Q = -e \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{p^0} \sum_{s=1,2} \left[ N_a^{(s)}(p) - N_b^{(s)}(p) \right]. \quad (1.24)$$

que comuta com o operador  $H$ ,

$$[Q, H] = 0, \quad (1.25)$$

logo,  $Q$  e  $H$  são observáveis comutantes.

A aplicação de  $Q$  no estado de vácuo resulta em,

$$Q a_s^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle = -e a_s^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle, \quad (1.26)$$

$$Q b_s^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle = e b_s^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle. \quad (1.27)$$

Isso mostra que o operador  $a_s^\dagger$  cria uma partícula de carga  $-e$  e o operador  $b_s^\dagger$  cria a mesma partícula, porém com carga oposta,  $e$  chamada antipartícula.



## 1.2 O campo eletromagnético

A descrição clássica dos campos elétricos e magnéticos é feita através das equações de Maxwell. Porém, devido a natureza dual da luz, Dirac em 1927 [6] notou que estes campos devem ser quantizados para a sua descrição adequada. Isto é feito enxergando o campo eletromagnético como um conjunto discreto infinito de partículas (fótons) que se comportam como osciladores harmônicos. Devido a natureza das equações de Maxwell, é necessário impor uma escolha de calibre para o processo de quantização, que será mostrado seguindo o calibre de Coulomb e o calibre de Lorentz.

### 1.2.1 As equações de Maxwell

As partículas de spin 1 [4] e sem massa, como fótons, são descritas pelas equações de Maxwell,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad (1.28)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.29)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0, \quad (1.30)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{J}, \quad (1.31)$$

Com  $\mathbf{E}$  é o campo elétrico,  $\mathbf{B}$  é o campo magnético,  $\rho$  é a densidade de carga e  $\mathbf{J}$  é a densidade de corrente. Introduzindo o 4-potencial vetor  $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ , podemos escrever os campos elétrico e magnético como seguem,

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A}, \quad (1.32)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (1.33)$$

que satisfazem as equações de Maxwell homogêneas (1.29) e (1.30). Com estas definições, podemos introduzir um novo ente, chamado o tensor eletromagnético,  $F^{\mu\nu}$ , tal que,

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.34)$$

O tensor  $F^{\mu\nu}$  é antissimétrico, e por meio do 4-potencial vetor, pode ser escrito como,

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (1.35)$$

Portanto, podemos escrever as equações de Maxwell homogêneas na forma covariante,

$$\partial^\alpha F^{\sigma\tau} + \partial^\tau F^{\alpha\sigma} + \partial^\sigma F^{\tau\alpha} = 0. \quad (1.36)$$

E as inhomogêneas (1.28) e (1.31) se tornam,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (1.37)$$

onde  $J^\nu = (\rho, \mathbf{J})$ .

Uma transformação de calibre pode ser aplicada no 4-potencial vetor  $A^\mu$  por adição do gradiente de uma função escalar  $\chi$ , ou seja,

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi, \quad (1.38)$$

e deixa os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  inalterados. O mesmo ocorre para o tensor  $F^{\mu\nu}$

$$F^{\mu\nu} \rightarrow F'^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} + (\partial^\mu \partial^\nu - \partial^\nu \partial^\mu) \chi = F^{\mu\nu}. \quad (1.39)$$

Portanto, substituindo  $F^{\mu\nu}$  nas equações (1.28) e (1.31) notamos que  $A^\mu$  satisfaz,

$$\square A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = J^\nu. \quad (1.40)$$

Para satisfazer a parte inhomogênea das equações de Maxwell,  $A^\mu$  deve satisfazer o calibre de Lorentz,

$$\partial_\mu A^\mu = \partial_t \phi + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (1.41)$$

Com esta condição, obtemos,

$$\square A^\mu = J^\mu. \quad (1.42)$$

Em um meio sem correntes e cargas obtemos  $\square A^\mu = 0$ . Outro exemplo de escolha de calibre é o de Coulomb,

$$\partial_i A^i = \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (1.43)$$

e com a escolha de  $A^0 = \phi = 0$ , reescrevemos (1.40) como

$$\square A^i = 0, \quad (1.44)$$

que é a equação de onda com  $A^i$  como solução.

### 1.2.2 Quantização via calibre de Coulomb

Na quantização do campo eletromagnético via calibre de Coulomb, a covariância é perdida devido a escolha de  $A^0 = 0$  e teremos apenas as componentes espaciais em  $A^i$  cuja equação dinâmica é  $\square A^i = 0$ . Dada as equações de Maxwell e o tensor de campo eletromagnético na equação (1.34), podemos estabelecer a respectiva densidade de lagrangeana como,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (1.45)$$

e o momento canônico por,

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\mu)}. \quad (1.46)$$

Obtemos, assim

$$\pi^0 = 0 \quad , \quad \pi^i = -\dot{A}^i + \partial^i A^0 = E^i. \quad (1.47)$$

Da lagrangeana de Maxwell (1.45), a passagem à hamiltoniana é construída (em termos

das densidades) a partir de

$$\mathcal{H} = \pi^i \dot{A}_i - \mathcal{L}. \quad (1.48)$$

Das propriedades do tensor eletromagnético (1.34), observamos que  $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -2(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)$ , que ao ser substituído na lagrangeana, e tendo em conta (1.47), o vínculo posto pelo calibre de Coulomb resulta que

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{A}}^2 + (\nabla \times \mathbf{A})^2). \quad (1.49)$$

Devemos estabelecer as relações de comutação entre os campos  $A^i$  e  $\pi^j = E^j$ , porém ao realizar este processo nos deparamos com o seguinte problema,

$$[A^i(x), E^j(x')] = -i\delta_{ij}^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (1.50)$$

e,

$$[\nabla \cdot \mathbf{A}(x), E^j(x')] = i\partial^i \delta_{ij}^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \neq 0. \quad (1.51)$$

Este comutador é diferente de zero, e contradiz o calibre de Coulomb  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ! Assim a relação de comutação entre esses campos deve ser modificada de forma que ao ser aplicado o divergente no campo  $\mathbf{A}$ , o comutador seja nulo. Para tanto, reescrevemos o delta de Dirac na forma integral, abaixo

$$[A^i(x), E^j(x')] = -i\Delta^{ij} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \cdot e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}. \quad (1.52)$$

O operador  $\Delta^{ij}$  deve ter a forma,

$$\Delta^{ij} = \delta^{ij} - \frac{\partial^i \partial^j}{\nabla^2}, \quad (1.53)$$

pois aplicando a eq. (1.50), obtemos  $\delta^{ij} - k^i k^j / k^2$ . Com isto resgatamos a consistência da relação da comutação.

Escrevendo o campo livre  $A(x)$  como uma Expansão de Fourier

$$A(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p_0} \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon^{(\lambda)}(p) [a^{(\lambda)}(p) e^{-ipx} + a^{(\lambda)\dagger}(p) e^{ipx}], \quad (1.54)$$

onde  $\epsilon^{(\lambda)}(p)$  é o vetor de polarização, cada componente de  $\epsilon^{(1,2)}$  é ortogonal ao momento  $\mathbf{p}$ , com  $\epsilon^{(\lambda)}(p) \cdot \mathbf{p} = 0$  e  $\epsilon^{(\lambda)}(p) \cdot \epsilon^{(\lambda')}(p) = \delta_{\lambda\lambda'}$ .

Ao substituir  $A(x)$  dado em (1.54) em  $H = \int d^3x \mathcal{H}$ , obtemos o operador hamiltoniano

$$H = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p^0}{2} \left[ a^{(\lambda)}(p) a^{(\lambda)\dagger}(p) + a^{(\lambda)\dagger}(p) a^{(\lambda)}(p) \right]. \quad (1.55)$$

A eq.(1.55) é a energia total de uma coleção de fótons, com polarização transversa ( $\lambda = 1, 2$ ), e é positiva definida.

Realizando o ordenamento normal, com o objetivo de manter os operadores de aniquilação à direita dos de criação.

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p^0}{2} \left[ a^{(\lambda)\dagger}(p) a^{(\lambda)}(p) \right], \\ &= \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p^0}{2} [N_{\lambda}(p)]. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Da definição do estado de vácuo, temos

$$a^{(\lambda)}(p)|0\rangle = 0, \quad (1.57)$$

Logo, de acordo com (1.56), o estado  $a^{(\lambda)\dagger}(p)|0\rangle$  descreve um fóton com energia  $p_0$  e polarização  $\lambda = 1, 2$ .

### 1.2.3 Quantização via calibre de Lorentz

Diferente da quantização via calibre de Coulomb, em que fixamos o vínculo  $A_0 = 0$ , na quantização covariante todas as componentes de  $A_{\mu}$  desempenham um papel, como é visto nas relações de comutação,

$$[A^{\mu}(x), \pi^{\nu}(x')] = i g^{\mu\nu} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (1.58)$$

onde  $g^{\mu\nu}$  é chamado o tensor métrico, cujo traço  $Tr(g^{\mu\nu}) = -2$ . Também temos

$$[A^{\mu}(x), A^{\nu}(x')] = [\pi^{\mu}(x), \pi^{\nu}(x')] = 0. \quad (1.59)$$

Porém ao calcular o momento canonicamente conjugado  $\pi^{\mu}$  o que obtemos na parte

temporal é,

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_0)} = 0. \quad (1.60)$$

Devido ao fato que na lagrangeana de Maxwell não existe dependência com  $\partial_0 A_0$ , e assim  $A_0$  comuta com  $\pi^0$ , perdemos a covariância das relações de comutação. Para resolver este problema de forma que a relação de comutação na eq.(1.58) seja satisfeita em todas as componentes de  $A^\mu$  e  $\pi^\mu$ , é necessário alterar a forma da lagrangeana de Maxwell (1.45), ou seja,

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2. \quad (1.61)$$

Esta nova lagrangeana nos fornece por meio da equação do Euler-Lagrange as equações de movimento, com

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu} - \partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A^\mu)} = 0, \quad (1.62)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A^\mu)} = -\partial_\mu A^\mu. \quad (1.63)$$

Deste dois últimos resultados, obtemos o calibre de Lorentz,

$$\square A^\mu = 0. \quad (1.64)$$

Agora obtemos  $\pi^i = E^i$  da mesma forma que antes. A aplicação do calibre de Lorentz (1.64) resulta,

$$\square A_\mu = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2p_0} p^2 \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{p}) \left[ -a^{(\lambda)}(p) e^{-ipx} + a^{(\lambda)\dagger}(p) e^{ipx} \right] = 0. \quad (1.65)$$

Para isto ser satisfeito, devemos ter que  $p_\mu p^\mu \equiv p^2 = 0$ , e isto vem da própria relação de dispersão de energia para um fóton, cuja energia é  $E = pc$ . Temos agora que os vetores de polarização  $\epsilon^\mu(p, \lambda)$  satisfazem a relação de ortonormalidade,

$$\epsilon_\mu(\mathbf{p}, \lambda) \cdot \epsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda') = g_{\lambda\lambda'}, \quad (1.66)$$

onde  $p^\mu = (p, 0, 0, p)$  e  $\epsilon^\mu(\mathbf{p}, \lambda) = \delta_\lambda^\mu$ , com  $\lambda = 0, 1, 2, 3$ . As duas componentes do vetor

de polarização  $\epsilon^\mu(\mathbf{p}, 1)$  e  $\epsilon^\mu(\mathbf{p}, 2)$  satisfazem  $\epsilon_\mu p^\mu = 0$ , são chamados vetores transversais, enquanto para as componentes,  $\epsilon^\mu(\mathbf{p}, 0)$  e  $\epsilon^\mu(\mathbf{p}, 3)$  temos  $\epsilon_\mu p^\mu \neq 0$ , são os escalares e longitudinais, que se combinam para anular-se, isto é

$$p_\mu \epsilon^\mu(\mathbf{p}, 1) = p_\mu \epsilon^\mu(\mathbf{p}, 2) = 0, \quad (1.67)$$

$$p_\mu \epsilon^\mu(\mathbf{p}, 0) = -p_\mu \epsilon^\mu(\mathbf{p}, 3). \quad (1.68)$$

Portanto, da relação de comutação (1.58) e substituindo  $A^\mu(x)$  obtemos,

$$[a_{\mathbf{p}, \lambda}, a_{\mathbf{p}', \lambda'}^\dagger] = -(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') g_{\lambda\lambda'}, \quad (1.69)$$

$$[a_{\mathbf{p}, \lambda}, a_{\mathbf{p}', \lambda'}] = [a_{\mathbf{p}, \lambda}^\dagger, a_{\mathbf{p}', \lambda'}^\dagger] = 0. \quad (1.70)$$

Dado que  $g_{00} = +1$ , o sinal negativo na relação de comutação (1.69) leva a uma inconsistência na interpretação do estado físico de uma partícula com polarização  $\lambda = 0$ . Considerando o estado,

$$|\mathbf{p}, \lambda\rangle \equiv a_{p, \lambda}^\dagger |0\rangle. \quad (1.71)$$

A norma desses estados é,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}, \lambda | \mathbf{p}, \lambda \rangle &= \langle 0 | a_{p, \lambda} a_{p, \lambda}^\dagger | 0 \rangle, \\ &= \langle 0 | [a_{p, \lambda}, a_{p, \lambda}^\dagger] | 0 \rangle, \\ &= -g_{\lambda\lambda} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0). \end{aligned} \quad (1.72)$$

Um espaço de Fock com produto escalar negativo não possui interpretação probabilística.

Para resolver este problema, impomos uma restrição ao espaço de Fock devido ao termo  $\partial_\mu A^\mu$  na lagrangeana (1.61), conhecido como método de Gupta-Bleuler. Dado um estado físico  $|\psi\rangle$ , temos

$$\langle \psi' | \partial_\mu A^\mu | \psi \rangle = 0, \quad (1.73)$$

que separando nas partes com os operadores de aniquilação e criação,

$$\partial_\mu A^\mu = (\partial_\mu A^\mu)^+ + (\partial_\mu A^\mu)^- \quad (1.74)$$

com,

$$(\partial_\mu A^\mu)^+ = -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p_0} p_\mu \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{p}) a^{(\lambda)}(p) e^{-ipx}, \quad (1.75)$$

$$(\partial_\mu A^\mu)^- = i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p_0} p_\mu \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon_\mu^{*(\lambda)}(\mathbf{p}) a^{(\lambda)\dagger}(p) e^{ipx}. \quad (1.76)$$

Assim,

$$(\partial_\mu A^\mu)^+ |0\rangle = 0, \quad (1.77)$$

$$\langle 0 | (\partial_\mu A^\mu)^- = 0. \quad (1.78)$$

Assim, considerando um estado  $|\psi\rangle = a^{(\lambda)\dagger}(\mathbf{p})|0\rangle$  e levando em conta (1.77) e as relações dos vetores de polarização em (1.67) e (1.68), temos

$$[p_\mu \epsilon^\mu(\mathbf{p}, 0) a^{(0)}(\mathbf{p}) + p_\mu \epsilon^\mu(\mathbf{p}, 3) a^{(3)}(\mathbf{p})] |\psi\rangle = 0, \quad (1.79)$$

dado que,  $p_\mu \epsilon^\mu(\mathbf{p}, 0) = -p_\mu \epsilon^\mu(\mathbf{p}, 3)$ , temos

$$[a^{(0)}(\mathbf{p}) - a^{(3)}(\mathbf{p})] |\psi\rangle = 0 \quad (1.80)$$

Portanto, os estados físicos de fótons escalares ( $\lambda = 0$ ) e longitudinais ( $\lambda = 3$ ) só existem como combinação linear entre eles. Ou seja, eles aparecem sempre nesta combinação, deixando apenas os dois graus de liberdade do campo eletromagnético quantizado conhecidos.



# Tópicos básicos na eletrodinâmica quântica

Neste capítulo abordamos alguns tópicos na eletrodinâmica quântica (QED), como a obtenção da lagrangeana com a inserção de um campo de calibre  $A_\mu$  e alguns processos de espalhamentos como o espalhamento Compton (elétron-fóton) e o espalhamento Bhabha (elétron-pósitron) e as correções radiativas advindas da expansão perturbativa da Matriz-S.

## 2.1 A lagrangeana da QED

A formulação lagrangeana da mecânica exerce o papel fundamental para a descrição de um sistema físico, pois permite extrair as equações de movimento por meio da equação de Euler-Lagrange [7].

Porém, na construção da lagrangeana é necessário respeitar as simetrias do sistema, sendo que a estas simetrias estão ligadas a conservação de quantidades físicas correspondentes. É o teorema de Noether [5] que estabelece essa conexão profunda entre simetrias e leis de conservação. Temos como exemplo, na mecânica clássica a conservação do momento linear quando o sistema exibe uma invariância por translação espacial, e a conservação da energia total quando a invariância é por uma translação temporal.

As transformações de simetria podem assumir caráter global ou local. Quando uma transformação de simetria deixa o sistema invariante em todos os pontos do espaço, esta transformação constitui em uma simetria global. Essa exigência é deixada de lado nas teorias de calibre, que é essencialmente uma teoria cuja ação é invariante sob uma transformação de simetria que depende das coordenadas do espaço-tempo, representando uma simetria local.

Portanto, para a construção da lagrangiana da QED, analisamos o comportamento da lagrangeana de Dirac sob uma transformação de calibre global, ou seja,

$$\psi(x) \rightarrow e^{-i\alpha} \psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow e^{i\alpha} \bar{\psi}(x). \quad (2.1)$$

Este procedimento é claramente uma rotação por um ângulo  $\alpha$  que não depende das coordenadas do espaço-tempo. Assim, dada a lagrangeana de Dirac,

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x). \quad (2.2)$$

Sob a transformação de calibre global (2.1), esta lagrangeana permanece invariante,

$$\mathcal{L}_D \rightarrow \mathcal{L}'_D = \mathcal{L}_D. \quad (2.3)$$

Porém, quando o parâmetro  $\alpha$  depende das coordenadas do espaço-tempo,  $\alpha(x)$ , a invariância é perdida, devido a presença de derivadas em primeira ordem na lagrangeana, assim,

$$\mathcal{L} = i\gamma^\mu \bar{\psi}(x) \partial_\mu \psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x), \quad (2.4)$$

realizando a transformação de calibre local,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}(x) i\gamma^\mu \left( e^{i\alpha(x)} (-ie^{-i\alpha(x)} \psi(x) \partial_\mu \alpha(x) + e^{-i\alpha(x)} \partial_\mu \psi(x)) \right) - m e^{i\alpha(x)} e^{-i\alpha(x)} \bar{\psi}(x) \psi(x) \\ &= \bar{\psi}(x) i\gamma^\mu e^{i\alpha(x)} (-ie^{-i\alpha(x)} \psi(x) \partial_\mu \alpha(x) + e^{-i\alpha(x)} \partial_\mu \psi(x)) - m \bar{\psi}(x) \psi(x) \\ &= \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) + \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \partial_\mu \alpha(x). \end{aligned}$$

Portanto, o que obtemos com esta transformação é

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \partial_\mu \alpha(x), \quad (2.5)$$

que claramente não é invariante sob uma transformação de calibre local, sobrando o termo  $\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \partial_\mu \alpha(x)$ .

A solução para este problema requer a introdução de um novo ente, o potencial de calibre  $A_\mu$ , que se transforma como

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x). \quad (2.6)$$

Com isto, introduzimos a derivada covariante  $D_\mu$ ,

$$\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu(x), \quad (2.7)$$

cuja transformação de calibre assume a forma

$$\mathcal{D}_\mu \psi \rightarrow e^{i\alpha(x)} \mathcal{D}_\mu \psi(x). \quad (2.8)$$

Fazendo a passagem de  $\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu$ , obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m) \psi(x) \\ &= \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu(x) - m) \psi \\ &= \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) - e\bar{\psi}(x) \gamma^\mu A_\mu(x) \psi(x) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Agora (2.9) é invariante de calibre. O termo  $-e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$  é a interação entre o campo de "gauge"(eletromagnético) e o campo de matéria.

Para alcançar a lagrangeana da QED, devemos introduzir um outro termo, a lagrangeana que corresponde a descrição do fóton livre, que é a lagrangeana de Maxwell  $\mathcal{L}_M$  (1.27) onde a mesma é invariante de calibre, logo,

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_D - e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

que é a lagrangeana da eletrodinâmica quântica.

## 2.2 A expansão perturbativa da Matriz-S

Ao tratar da evolução temporal de um sistema, podemos versar sobre dois pontos de vista postos na construção da mecânica quântica, que é a representação de Schrödinger, cujos estados evoluem no tempo, mantendo os operadores constantes, e a de Heisenberg, que mantém os estados fixos no tempo e lida com a evolução temporal dos operadores. Em ambas representações, a hamiltoniana  $H$ , que é o observável correspondente à energia

total do sistema, governa a evolução temporal tanto dos estados como dos operadores, e as duas são equivalentes na descrição de sistemas quânticos.

Em sistemas interagentes, o operador  $H$  do sistema terá uma contribuição da hamiltoniana livre  $H_0$  que corresponde aos campos livres e outra que advém da própria interação entre os campos, a hamiltoniana interagente  $H_I$ .

$$H = H_0 + H_I. \quad (2.11)$$

Para tratarmos da evolução temporal deste sistema devemos usar uma representação mais apropriada que é a de Dirac, cujos estados e operadores tem dependência temporal. Portanto, se temos um autoestado  $|\psi(t)\rangle_I$  que evolui no tempo, a conexão com um autoestado  $|\psi(t)\rangle_s$  na representação de Schrödinger se dá como,

$$|\psi(t)\rangle_I = e^{iH_0 t} |\psi(t)\rangle_s, \quad (2.12)$$

e o operador hamiltoniano interagente,

$$H_I \equiv (H_{int})_I = e^{iH_0 t} (H_{int})_s e^{-iH_0 t}. \quad (2.13)$$

Temos que a equação de Schrödinger para os autoestados é dado por,

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_s = H |\psi(t)\rangle_s, \quad (2.14)$$

logo,

$$i \frac{d}{dt} e^{-iH_0 t} |\psi(t)\rangle_I = (H_0 + H_{int})_s e^{-iH_0 t} |\psi(t)\rangle_I$$

$$i \left( -i(H_0)_s e^{-iH_0 t} |\psi(t)\rangle_I + e^{-iH_0 t} \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I \right) = e^{-iH_0 t} (H_0)_s |\psi(t)\rangle_I + (H_{int})_s e^{-iH_0 t} |\psi(t)\rangle_I.$$

Assim obtemos,

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I = H_I(t) |\psi(t)\rangle_I. \quad (2.15)$$

Que é a equação de Schrödinger, porém agora o que governa a evolução dos estados é

o próprio operador hamiltoniano interagente.

Devemos conhecer qual é a forma do operador de evolução temporal  $U(t, t_0)$ , responsável pela dinâmica do autoestado  $|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle$ . De (2.15) temos,

$$i \frac{d}{dt} U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle = H_I U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle.$$

Isso é satisfeito se,

$$i \frac{d}{dt} U(t, t_0) = H_I U(t, t_0). \quad (2.16)$$

Integrando entre  $t_0$  e  $t$

$$i \int_{t_0}^t dU(t_1, t_0) = \int_{t_0}^t H_I U(t_1, t_0) dt_1,$$

$$i [U(t, t_0) - U(t_0, t_0)] = \int_{t_0}^t H_I U(t_1, t_0) dt_1. \quad (2.17)$$

Temos que  $U(t_0, t_0) = 1$ . Logo,

$$U(t, t_0) = 1 + \frac{1}{i} \int_{t_0}^t H_I(t_1) U(t_1, t_0) dt_1. \quad (2.18)$$

Podemos resolver (2.18) por meio de uma série perturbativa, ou seja, usando aproximações sucessivas em  $U(t_i, t_0)$ , obtemos,

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= 1 + \frac{1}{i} \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + \frac{1}{i^2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n). \end{aligned} \quad (2.19)$$

No contexto da QED, a hamiltoniana de interação  $H_I$  exibe a constante de acoplamento que é a constante de estrutura fina ( $\alpha \approx 1/137$ ), que é muito pequena em altas ordens em  $\alpha$ , que garante a convergência de (2.19). A hamiltoniana de interação acopla o campo de calibre (gauge)  $A_\mu$ , responsável pela descrição do fóton, e o de Dirac  $\psi$ , tendo como excitações elementares o elétron e o pósitron respectivamente. Portanto, da eq.(2.10), o lagrangeano interagente é  $\mathcal{L}_i = -e A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ . A passagem a  $\mathcal{H}_I$  é obtida de,

$$\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_i = eA_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad (2.20)$$

onde  $e$  é a carga elementar do elétron.

A Matriz- $S$  é definida no limite em que  $t \rightarrow \infty$  em (2.19), com as condições

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) = S, \quad (2.21)$$

e,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} U(t) = 1, \quad (2.22)$$

assim, o estado  $|\psi(\infty)\rangle$  se conecta com o estado inicial  $|\psi(-\infty)\rangle = |i\rangle$  como

$$|\psi(\infty)\rangle = S|i\rangle. \quad (2.23)$$

A probabilidade de transição em um processo de espalhamento com estado inicial  $|i\rangle$  e estado final  $|f\rangle$  é,

$$|\langle f|\psi(\infty)\rangle|^2, \quad (2.24)$$

e a amplitude de probabilidade,

$$\langle f|\psi(\infty)\rangle = \langle f|S|i\rangle. \quad (2.25)$$

A Matriz- $S$  tem a forma,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T \{H_I(t_1)H_I(t_2)\dots H_I(t_n)\}. \quad (2.26)$$

O operador  $T$  é responsável pela ordenamento temporal dos operadores de campos envolvidos em  $H_I$ , que supondo dois campos  $\phi(x_1)\phi(x_2)$  em tempos distintos, o resultado da ordenamento temporal resulta no teorema de Wick,

$$T \{\phi(x_1)\phi(x_2)\} = N \{\phi(x_1)\phi(x_2)\} + \langle 0|T \{\phi(x_1)\phi(x_2)\}|0\rangle, \quad (2.27)$$

já o operador  $N$  é responsável pelo ordenamento normal dos operadores. O segundo termo de (2.27) é o valor esperado do estado de vácuo dos campos ordenados temporalmente,

que resulta no propagador de campo numa transição vácuo-vácuo. Supondo  $t_2 > t_1$ , a partícula é criada em  $x_1$  por meio da ação do operador de criação (de partícula) sobre o estado de vácuo e aniquilada em  $x_2$ . Para o férmion e o fóton, estes propagadores são:

- **Propagador do Férmion**

$$iS_F(x_1 - x_2) = \langle 0|T \{ \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \} |0\rangle, \quad (2.28)$$

cuja representação integral é,

$$S_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ipx} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ipx} S_F(p), \quad (2.29)$$

com,

$$S_F(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (2.30)$$

O intervalo de integração compreende o intervalo de  $-\infty < p_0 < \infty$  ao longo do eixo real. Este propagador é representado pelo diagrama de Feynman,

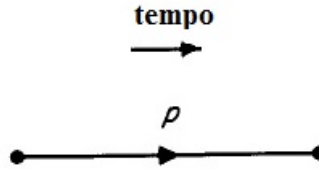


Figura 2.1: Diagrama de Feynman para o propagador  $iS_F(p)$  do elétron de momento  $p$ , com a linha do tempo da esquerda para a direita.

- **Propagador do Fóton**

$$iD_F^{\mu\nu}(x_1 - x_2) = \langle 0|T \{ A^\mu(x_1) A^\nu(x_2) \} |0\rangle, \quad (2.31)$$

onde,

$$D_F^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k D_F^{\mu\nu}(k) e^{-ikx}, \quad (2.32)$$

com,

$$D_F^{\mu\nu}(k) = \frac{-g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}. \quad (2.33)$$

O propagador do fóton é representado pelo diagrama de Feynman,

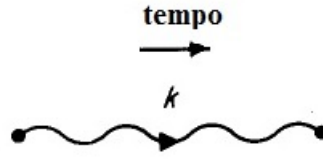


Figura 2.2: Diagrama de Feynman para o propagador  $iD_F^{\mu\nu}(k)$  do fóton de momento  $k$ .

Nas equações (2.30) e (2.33) foram adicionados o termo  $i\epsilon$  no denominador para deslocar o polo, que pela relação de dispersão de energia de Einstein, para o férmion  $p^2 = m^2$  e para o fóton  $k^2 = 0$ .

## 2.3 Processos na QED em mais baixas ordens

A Matriz-S fornece a amplitude de transição de um estado inicial  $|i\rangle$  para um estado final  $|f\rangle$ , dado pelo seu elemento de matriz  $\langle f|S|i\rangle$ . Estes processos podem ser representados pelos diagramas de Feynman. Para a obtenção da amplitude de transição para qualquer diagrama, devemos inicialmente calcular os elementos de matriz nas ordens mais baixas da expansão perturbativa da Matriz-S.

Podemos escrever a eq.(2.14) integrando em todas as coordenadas do espaço-tempo ao substituir (2.20),

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int \dots \int d^4x_1 \dots d^4x_n T \{ \mathcal{H}_{\mathcal{I}}(x_1) \dots \mathcal{H}_{\mathcal{I}}(x_n) \}, \quad (2.34)$$

onde  $\mathcal{H}_{\mathcal{I}} = eN\{\bar{\psi}(x)\mathcal{A}(x)\psi(x)\}$ , e a notação  $\mathcal{A} = A_\mu\gamma^\mu$ . Na forma em que estes campos são descritos como uma expansão de Fourier, (1.4) e (1.54), podemos separar  $\mathcal{A} = \mathcal{A}^+ + \mathcal{A}^-$ , em que o termo  $\mathcal{A}^+$  contem o operador de aniquilação e  $\mathcal{A}^-$  contem o operador de criação, o mesmo vale para os campos  $\psi$  e  $\bar{\psi}$ .

Em primeira ordem da expansão perturbativa não teremos nenhum processo real, devido as partículas não satisfazerem as relações de dispersão de energia para o fóton  $k^2 = 0$  e para o fermion  $p^2 = m^2$ . Temos como exemplo de um processo em primeira ordem é a absorção de um fóton com a emissão de um par elétron-pósitron,



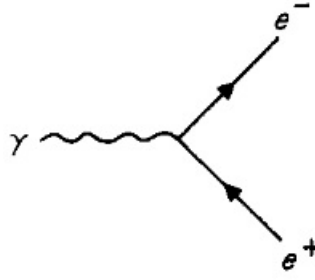


Figura 2.3: Diagrama de Feynman para um processo em primeira ordem na matriz S.

Note que só temos um vértice neste diagrama, o que representa ser em primeira ordem da expansão perturbativa. No processo representado pelo diagrama de Feynman da fig.(2.3) temos a absorção de um fóton de momento  $k_1$  e a criação de um par elétron-pósitron com momentos  $p_1$  e  $p_2$ , com estados inicial e final,

$$|i\rangle = |\gamma(\mathbf{k}_1)\rangle = a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}_1)|0\rangle, \quad (2.35)$$

$$|f\rangle = |e^-(\mathbf{p}_1), e^+(\mathbf{p}_2)\rangle = |b_s^\dagger(\mathbf{p}_1)a_s^\dagger(\mathbf{p}_2)|0\rangle. \quad (2.36)$$

A amplitude de transição para este processo é,

$$\begin{aligned} \langle f|S^{(1)}|i\rangle &= \langle e^-(\mathbf{p}_1), e^+(\mathbf{p}_2)| -ie \int d^4x : \bar{\psi}^- \mathcal{A}^+ \psi^- : |\gamma(\mathbf{k}_1)\rangle \\ &= (2\pi)^4 \frac{m}{\sqrt{2E_{p_1}E_{p_2}\omega_k}} \delta^{(4)}(k_1 - p_1 - p_2) \bar{u}_s(\mathbf{p}_1) (-ie\gamma^\mu) \epsilon_\mu^{(\lambda)} v_s(\mathbf{p}_2), \end{aligned} \quad (2.37)$$

temos que  $\bar{u}_s$  e  $v_s$  são os espinores do elétron e do pósitron, que são criados no estado final com energias  $E_{p_1}$  e  $E_{p_2}$ ,  $\epsilon_\mu^{(\lambda)}$  é o vetor de polarização do fóton com energia  $\omega_k$ . A função- $\delta^{(4)}$  implica na conservação do 4-momento, onde  $k_1 = p_1 + p_2$ , que não é satisfeito pela relação de dispersão de energia para o fóton  $k^2 = 0$  e para o elétron  $p_1^2 = m^2$ , o que ocasiona na amplitude de transição nula em todos os diagramas em primeira ordem.

Os processos em que são satisfeitas as relações de dispersão de energia surgem apenas em segunda ordem em diante na expansão perturbativa. No espalhamento Compton, que descreve a interação do fóton com um elétron,

$$e^-(\mathbf{p}_1) + \gamma(\mathbf{k}_1) \rightarrow e^-(\mathbf{p}_2) + \gamma(\mathbf{k}_2), \quad (2.38)$$

o diagrama de Feynman correspondente é o da figura abaixo:

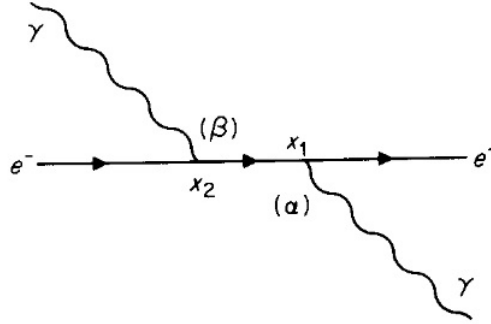


Figura 2.4: Diagrama de Feynman para o espalhamento Compton.

A Matriz-S neste processo em ordem mais baixa é,

$$S_c = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\alpha i S_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta A_\alpha^-(x_1) A_\beta^+(x_2) \psi^+(x_2), \quad (2.39)$$

os termos  $\psi^+$  e  $A_\beta^+$  são responsáveis pela absorção do elétron e do fóton em  $x_2$  e os termos  $\bar{\psi}^-$  e  $A_\alpha^-$  são responsáveis pela emissão dos mesmos em  $x_1$ , e entre estes dois pontos temos o propagador do fermion  $S_f(x_1 - x_2)$  que surge devido ao operador  $T$  de ordenamento temporal.

Na figura (2.4), nas linhas externas temos no estado inicial do fóton com momento  $k_1$  interagindo com o elétron de momento  $p_1$ , a linha interna é o propagador do férmion. Neste processo podemos escrever os estados  $|i\rangle$  e  $|f\rangle$  como a aplicação de operadores de criação no estado de vácuo, ou seja,

$$|i\rangle = c^\dagger(\mathbf{p}_1) a^\dagger(\mathbf{k}_1) |0\rangle, \quad (2.40)$$

$$|f\rangle = c^\dagger(\mathbf{p}_2) a^\dagger(\mathbf{k}_2) |0\rangle. \quad (2.41)$$

Portanto,

$$\langle f | S_c | i \rangle = \left[ (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_2 + k_2 - p_1 - k_1) \left( \frac{m}{VE_{p_1}} \right)^{1/2} \left( \frac{m}{VE_{p_2}} \right)^{1/2} \left( \frac{1}{2V\omega_{k_1}} \right)^{1/2} \left( \frac{1}{2V\omega_{k_2}} \right)^{1/2} \right] \mathcal{M}. \quad (2.42)$$

Na equação acima  $V$  é o volume do nosso espaço que tenderá ao infinito e  $\mathcal{M}$  é a

amplitude de Feynman, que para este processo será:

$$\mathcal{M} = -e^2 \bar{u}(\mathbf{p}') \not{\epsilon}(\mathbf{k}') iS_F(q = p + k) \not{\epsilon}(\mathbf{k}) \bar{u}(\mathbf{p}). \quad (2.43)$$

No espalhamento Bhabha temos a interação elétron-pósitron com a troca de um fóton virtual, cujo diagrama de Feynman é,

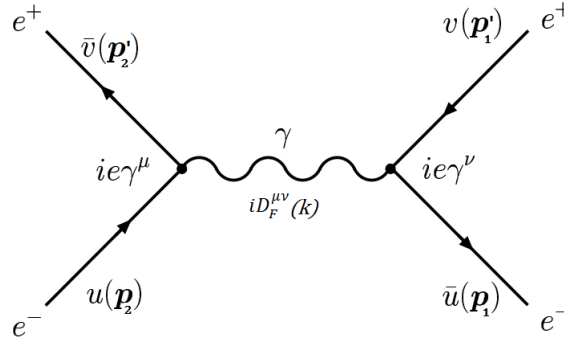


Figura 2.5: Diagrama de Feynman para o espalhamento Bhabha, explicitando os termos que surgirão na amplitude  $\mathcal{M}$ , correspondente a cada linha interna, externa e os vértices.

A amplitude de Feynman é,

$$\mathcal{M}_B = (ie)^2 \bar{u}(\mathbf{p}_2) \gamma^\nu v(\mathbf{p}'_2) iD_F^{\mu\nu}(k) \bar{v}(\mathbf{p}'_1) \gamma^\mu u(\mathbf{p}_1). \quad (2.44)$$

Para cada linha externa  $u(\mathbf{p})$  e  $\bar{u}(\mathbf{p})$  são os espinores para o elétron inicial e final e  $v(\mathbf{p})$  e  $\bar{v}(\mathbf{p})$  os espinores do pósitron inicial e final. Na linha interna,  $iD_F^{\mu\nu}(k)$  é o propagador do fóton de momento  $k$ , mediador dessa interação.

A probabilidade de transição neste processo de espalhamento é obtido calculando  $|\langle f|S_c|i\rangle|^2$ . Para qualquer processo teremos como forma geral a amplitude de transição [8],

$$\langle f|S|i\rangle = \delta_{fi} + (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum p'_f - \sum p_i\right) \prod_i \left(\frac{1}{2VE_i}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{VE'_f}\right)^{1/2} \prod_l (2m_l)^{1/2} \mathcal{M}, \quad (2.45)$$

Nestes processos citados, as amplitudes de transição  $\mathcal{M}$  são finitas, o que não ocorre nos processos com correções radiativas como a polarização de vácuo e a auto-energia do elétron, que são os laços das linhas internas nos diagramas. Estes diagramas são:

No processo em (a) da figura (2.6) temos a transição ( $e^- \rightarrow e^-$ ) com estado inicial

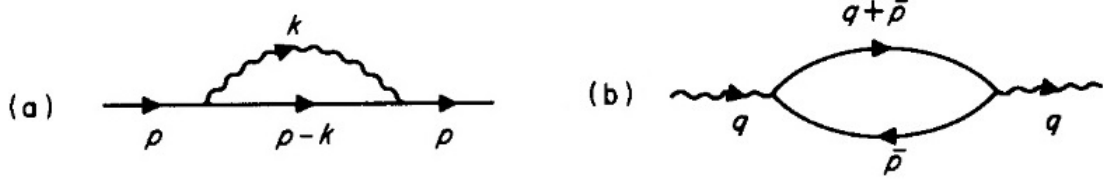


Figura 2.6: Correções radiativas de segunda ordem para o férmion e o fóton.

$|i\rangle = c^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$  e estado final  $|f\rangle = c^\dagger(\mathbf{p}' = \mathbf{p})|0\rangle$ , cuja correção dada pela Matriz-S é

$$S(e^- \rightarrow e^-) = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\alpha i S_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta \psi^+(x_2) i D_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2), \quad (2.46)$$

e amplitude de transição,

$$\langle f|S(e^- \rightarrow e^-)|i\rangle = \left[ (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' - p) \left( \frac{m}{VE_p} \right)^{1/2} \left( \frac{m}{VE'_p} \right)^{1/2} \right] \cdot \mathcal{M}, \quad (2.47)$$

no qual

$$\mathcal{M} = \frac{-e_0^2}{(2\pi)^4} \bar{u}(\mathbf{p}) \int d^4k [i D_{F\alpha\beta}(k) \gamma^\alpha i S_F(p - k) \gamma^\beta] u(\mathbf{p}), \quad (2.48)$$

com  $\bar{u}(\mathbf{p})$  e  $u(\mathbf{p})$  os espinores do elétron inicial e final. Este processo muda as propriedades do elétron, revestindo-o pela nuvem fotônica devido a interação com o campo de radiação, tornando-o o elétron nu em um elétron vestido. Esta interação muda a energia do sistema, i.e, a massa do elétron físico  $m'$  é alterada em comparação com a massa  $m$  do elétron sem interação, isto é chamado de *auto-energia* do elétron.

Contudo, para este processo a amplitude de Feynman (2.48) leva a a integrais que divergem para grandes valores no momento  $k$ , cujo termo divergente é,

$$\begin{aligned} ie_0^2 \Sigma(p) &= \frac{(ie_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \gamma^\alpha \frac{i S_F(p - k)}{k^2 + i\epsilon} \gamma^\beta \\ &= \frac{e_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \gamma^\alpha \frac{(\not{p} - \not{k} + m)}{[k^2 + i\epsilon][(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon]} \gamma^\beta, \end{aligned} \quad (2.49)$$

o resultado desta integral é proporcional a  $k$ , sendo linearmente divergente.

O processo da fig.(2.6b), é a transição ( $\gamma \rightarrow \gamma$ ) com a correção radiativa no propagador

chamado de auto-energia do fóton, cuja amplitude de Feynman  $\mathcal{M}$  é,

$$\mathcal{M} = \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{q}) \frac{ie_0^2}{(2\pi)^4} (-1) \int d^4\bar{p} Tr[\gamma^\mu iS_F(q+\bar{p})\gamma^\nu iS_F(\bar{p})] \epsilon_\nu^{(\lambda)}(\mathbf{q}). \quad (2.50)$$

Nesse processo, a interação do campo eletromagnético com a matéria permite ao fóton se aniquilar e criar um par elétron-pósitron virtual, que é aniquilado em seguida criando o fóton novamente. Assim, o campo eletromagnético modifica a distribuição desse par elétron-pósitron, ou seja, "polariza o vácuo", e conseqüentemente altera o valor da carga "nua"  $e_R$ , para a carga física  $e$  que é vestida pela interação. Assim, o diagrama que representa esse processo é conhecido como diagrama de *polarização de vácuo* e resulta numa expressão divergente, conforme (2.51)

$$\begin{aligned} ie_0^2 \Pi^{\mu\nu}(q) &= \frac{(ie_0)^2}{(2\pi)^4} (-1) Tr \int d^4\bar{p} \gamma^\mu iS_F(\bar{p}+q) \gamma^\nu iS_F(\bar{p}) \\ &= \frac{e_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4\bar{p} \frac{Tr[\gamma^\mu(\not{\bar{p}} - \not{q} - m)(\not{\bar{p}} - m)\gamma^\nu]}{[(\bar{p}+q)^2 - m^2 + i\epsilon][(\bar{p})^2 - m^2 + i\epsilon]}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

o termo  $Tr$  é o traço e  $\Pi^{\mu\nu}(q)$  é um tensor de segunda ordem chamado *tensor de polarização de vácuo*. Na eq.(2.51), o integrando é proporcional a  $p^2$ , que para valores muito grande em  $p$ , resulta em infinito.

As integrais divergentes nas amplitudes de transição resultam em infinitos no cálculo das grandezas físicas como a energia e seção de choque no espalhamento, e não tem sentido físico. Para contornar este problema é necessário adotar alguns procedimentos, como os de renormalização e regularização, que permite extrair soluções finitas das correções radiativas.

# Regularização e Renormalização na QED

## 3.1 Introdução aos métodos de regularização

O tratamento das divergências na teoria quântica de campos tem sido um dos grandes desafios para alcançar uma teoria consistente com os resultados experimentais, levando os físicos a desenvolverem métodos que possam dar sentido físico às integrais divergentes provenientes das correções radiativas.

A alternativa encontrada para tratar desses infinitos são as técnicas de regularização, que consistem em um método matemático no qual as integrais se tornam finitas por meio de um parâmetro regularizador, que, por exemplo, atuam como parâmetro de corte.

A ideia de regularizar teve início no método de cutoff das integrais divergentes, ou seja, multiplicando um fator de convergência[8], por exemplo,

$$f(p^2, \Lambda^2) = \left( \frac{-\Lambda^2}{p^2 - \Lambda^2} \right)^2 \quad (3.1)$$

onde  $\Lambda$  é chamado parâmetro de corte. Assim, a função assume um comportamento convergente para grandes valores de momento  $p$ . No entanto quando  $\Lambda \rightarrow \infty$  o fator de convergência  $f(p^2, \Lambda^2) \rightarrow 1$ , restaurando a integral original.

Porém esse método não garante a simetria de calibre na QED, levando a inconsistências como por exemplo uma massa de repouso não-nula do fóton, levando a necessidade de desenvolver outros métodos.

Em 1949, Pauli e Villars [9][10] desenvolveram um método de regularização cuja técnica consiste na introdução de um campo auxiliar massivo chamado regulador, com a função de eliminar as divergências das integrais infinitas. Diferente do método de cutoff, a técnica de Pauli-Villars fornece um método exato para o uso desses reguladores na QED, de tal maneira que a teoria se mantém invariante de calibre em qualquer ordem da expansão perturbativa.

Diferente do método de Pauli-Villars, temos o método de Regularização Analítica

[11] que é a essência da Regularização Dimensional, inicialmente investigado por Speer e Bollini[12][13], onde explora o conceito de extensão analítica, i.e, estender o domínio de definição de uma dada função analítica em algum parâmetro. Um exemplo disso é no propagador do fermion  $(p^2 + m^2 - i\epsilon)^{-1}$ , que é alterado por um parametro regulador  $\alpha$ , na forma  $(p^2 + m^2 - i\epsilon)^{-\alpha}$ . Portanto a função divergente passa a ter um comportamento dependente de  $\alpha$ . Operando dessa forma, ao retornar para  $\alpha = 1$  enxergamos a porção finita do resultado da integral divergente.

Dentre os métodos citados e outros presentes na literatura, a Regularização Dimensional é a que melhor se adapta a TQC. O método foi criado por Gerardus 't Hooft e Martinus J.G. Veltman [14][15]em 1972, cuja técnica possibilitou o tratamento adequado das teorias não-abelianas como a teoria eletrofraca, e ganharam o prêmio Nobel de Física de 1999. A ideia consiste em alterar a dimensão do espaço-tempo nas integrais de um valor  $D$  para  $D - \eta$ , e por fim tomar o limite  $\eta \rightarrow 0$ . Assim, analisamos as divergencias na integral com polos em  $\eta$ . A vantagem desse método reside na preservação das Simetrias de Calibre e de Lorentz. Dessa forma a regularização dimensional se tornou uma ferramenta essencial na TQC.

Assim, neste capítulo abordamos o método de Pauli-Villars e o Dimensional para tratar da integral divergente, que surge da correção radiativa no propagador do fóton, e exibimos no exemplo da polarização de vácuo a vantagem do segundo sobre o primeiro.

## 3.2 Polarização de Vácuo

O diagrama de polarização de vácuo constitui em ordem mais baixa da teoria de perturbação, numa correção radiativa ao propagador do fóton

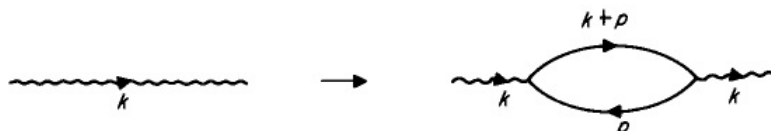


Figura 3.1: Correção radiativa em mais baixa ordem no propagador do fóton.

A passagem do propagador sem correção  $D_{F\mu\nu}(k)$  para o propagador corrigido se dá como:

$$iD_{F\mu\nu}(k) \rightarrow iD_{F\mu\Lambda}(k)i\Pi^{\lambda\sigma}(k)iD_{F\sigma\nu}(k), \quad (3.2)$$

onde  $\Pi^{\lambda\sigma}$  é o tensor de polarização de vácuo obtido da amplitude de transição em (2.50). A modificação deste propagador da ordem de  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c}$  é dada pela contribuição do propagador não perturbado mais a correção



Figura 3.2: Correções radiativas no propagador do fóton .

Isto é expresso como:

$$iD'_{F\mu\nu}(k) = iD_{F\mu\nu}(k) + iD_{F\mu\Lambda}(k)i\Pi^{\lambda\sigma}(k)iD_{F\sigma\nu}(k) + \dots \quad (3.3)$$

Substituindo a expressão do propagador do fóton, eq.(2.21), este tensor é dado por,

$$ie_0^2\Pi^{\mu\nu}(k) = \frac{-e_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{Tr[\gamma^\mu(\not{p} + \not{k} + m)\gamma^\nu(\not{p} + m)]}{[(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon][p^2 - m^2 + i\epsilon]}. \quad (3.4)$$

Como pode ser observado na equação acima, o integrando será proporcional a  $p^2$ , que resulta numa integral quadraticamente divergente para grandes valores no momento  $p$ , de forma que o cálculo desta integral não é direto. Analisaremos antes algumas propriedades deste tensor, que devido a invariância de Lorentz, tem forma mais geral dada por

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = Dg_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}k^2\Pi^{(1)}(k^2) + k_\mu k_\nu \Pi^{(2)}(k^2), \quad (3.5)$$

com,  $\Pi^{(1)}(k^2)$  e  $\Pi^{(2)}(k^2)$  funções que dependem de  $k^2$ , e  $D$  é uma constante. No limite em que  $k^2 \rightarrow 0$ , temos que o propagador corrigido em (3.1) é,

$$\begin{aligned} iD'_{F\mu\nu}(k^2 \rightarrow 0) &= \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} + \frac{-ig_{\mu\lambda}}{k^2 + i\epsilon} iDg^{\lambda\sigma} \frac{-ig_{\sigma\nu}}{k^2 + i\epsilon} + \dots \\ &= \left( \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} + \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} iD \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} + \dots \right) g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.6)$$



ou ainda,

$$iD'_{F\mu\nu}(k^2 \rightarrow 0) = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \left( 1 + \frac{D}{k^2} + \left( \frac{D}{k^2} \right)^2 + \dots \right) \approx \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \cdot \frac{1}{1 - \frac{D}{k^2}}. \quad (3.7)$$

Assim conseguimos,

$$iD'_{F\mu\nu}(k^2 \rightarrow 0) = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 - D + i\epsilon}. \quad (3.8)$$

Porém, este resultado é incoerente pela relação de dispersão de energia, pois faz surgir um fóton massivo (com massa  $\sqrt{D}$ ), portanto devemos ter  $\Pi_{\mu\nu}(0) = 0$  na eq.(3.5), pois o fóton tem massa de repouso nula.

Ademais, a amplitude de transição em qualquer processo de espalhamento deve ser invariante por uma transformação de calibre. Considerando o espalhamento de um elétron por um potencial externo cujo propagador do fóton é modificado pela polarização de vácuo.

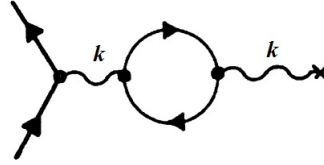


Figura 3.3: Interação de um elétron com um potencial externo.

A amplitude de Feynman deste espalhamento é

$$\mathcal{M}_{fi} = e\bar{u}_f \gamma^\mu u_i \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} i\Pi_{\mu\nu}(k) A^\nu(k). \quad (3.9)$$

Esta amplitude deve ser invariante quando o campo  $A^\nu$  sofre uma transformação de calibre,

$$A^\nu(k) \rightarrow A^\nu(k) + ik^\nu \xi(k), \quad (3.10)$$

logo,

$$\mathcal{M}_{fi} \rightarrow \mathcal{M}'_{fi} = \mathcal{M}_{fi} - e\bar{u}_f \gamma^\mu u_i \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \Pi_{\mu\nu}(k) k^\nu. \quad (3.11)$$

Isto implica que  $\Pi_{\mu\nu}(k)k^\nu = 0$ , em razão que este tensor  $\Pi_{\mu\nu}$  é simétrico. Reescrevemos como

$$k^\mu \Pi_{\mu\nu}(k) = 0. \quad (3.12)$$

Esse último resultado, conhecido como a identidade de Ward [16], deve ser satisfeito para que as quantidades observáveis sejam invariantes e a teoria respeite o princípio de invariância de calibre.

### 3.3 Regularização de Pauli-Villars

O método de regularização de Pauli-Villars consiste em subtrair do integrando uma função que tem o mesmo comportamento divergente, de forma que o resultado da integral decresça rapidamente com o acréscimo do momento  $p$ . Escrevendo  $\Pi_{\mu\nu}$  na forma,

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = \int d^4p f_{\mu\nu}(k, p, m^2), \quad (3.13)$$

fazemos então,

$$\Pi_{\mu\nu}(k) \rightarrow \Pi'_{\mu\nu}(k) = \int d^4p \left( f_{\mu\nu}(k, p, m^2) + \sum_{i=0}^N C_i f_{\mu\nu}(k, p, M_i^2) \right). \quad (3.14)$$

Na equação acima os coeficientes  $C_i$  e  $M_i$  são determinados de forma que  $\Pi'_{\mu\nu}(k)$  seja uma integral convergente. Obtemos

$$\begin{aligned} \Pi'_{\mu\nu}(k) = (ie)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} & \left\{ \frac{\text{Tr}[\gamma_\mu(\not{p} + m)\gamma_\nu(\not{p} - \not{k} + m)]}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)[(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon]} + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^N C_i \frac{\text{Tr}[\gamma_\mu(\not{p} + M_i)\gamma_\nu(\not{p} - \not{k} + M_i)]}{(p^2 - M_i^2 + i\epsilon)[(p - k)^2 - M_i^2 + i\epsilon]} \right\}. \end{aligned}$$

Os traços das matrizes gamas são calculados por meio das identidades (Apêndice A),

$$\text{Tr}[\gamma_\mu(\not{p} + m)\gamma_\nu(\not{p} - k + m)] = 4 [p_\mu(p - k)_\nu + p_\nu(p - k)_\mu - g_{\mu\nu}(p^2 - k \cdot p - m^2)]. \quad (3.15)$$

O tensor  $\Pi'_{\mu\nu}$  torna-se

$$\Pi'_{\mu\nu}(k) = -4ie^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{p_\mu(p-k)_\nu + p_\nu(p-k)_\mu - g_{\mu\nu}(p^2 - k \cdot p - m^2)}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)[(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon]} + reg \right\}, \quad (3.16)$$

o termo "reg" significa regularizador, que foi adicionado na eq.(3.13). No cálculo da integral acima, utilizamos a identidade,

$$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \int_0^\infty d\alpha \exp[i\alpha(p^2 - m^2 + i\epsilon)]. \quad (3.17)$$

Desta forma, reescrevemos nosso tensor como,

$$\begin{aligned} \Pi'_{\mu\nu}(k) &= -4ie^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} ([p_\mu(p-k)_\nu + p_\nu(p-k)_\mu - g_{\mu\nu}(p^2 - k \cdot p - m^2)] \times \\ &\quad \times \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \cdot \exp\{i(\alpha_1(p^2 - m^2) + \alpha_2[(p-k)^2 - m^2])\} + reg). \end{aligned}$$

Por conveniência, o termo  $i\epsilon$  pode ser retirado e recolocado no fim dos cálculos, uma vez que ele é posto "a mão" para deslocar o polo  $k^2 = 0$  no propagador. No cálculo envolvendo as variáveis  $p$  e  $p-k$ , introduzimos as variáveis  $z_1$  e  $z_2$  nas exponenciais, por meio da identidade,

$$ip_\mu = \frac{\partial}{\partial z_i^\mu}, \exp(ipz_i)|_{z_i=0}, \quad (3.18)$$

consequentemente,

$$\Pi'_{\mu\nu}(k) = 4ie^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left( \left[ -\frac{\partial}{\partial z_1^\mu} \frac{\partial}{\partial z_2^\nu} - \frac{\partial}{\partial z_1^\nu} \frac{\partial}{\partial z_2^\mu} - g_{\mu\nu} \left( -\frac{\partial}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial z_2} - m^2 \right) \right] \times \right. \quad (3.19)$$

$$\left. \times \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \exp\{i(\alpha_1(p^2 - m^2) + \alpha_2[(p-k)^2 - m^2])\} + reg \right) |_{z_2=z_1=0}.$$

$$(3.20)$$

Com esta mudança e alterando a ordem de integração, as integrais em  $p$  se tornam do tipo gaussianas, sendo possível de resolver sem maiores problemas, ou seja,

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp(ap^2 + bp + c) = \frac{1}{(4\pi)^2 a^2} \exp[-i(b^2/4a + c)], \quad (3.21)$$

e portanto, no nosso caso temos,

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \exp[(\alpha_1 + \alpha_2)p^2 + (z_1 + z_2 - 2\alpha_2 k)p + (-m^2(\alpha_1 + \alpha_2) + k^2\alpha_2 - kz_2)] = \\
& = \frac{-i}{(4\pi)^2(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \exp \left\{ i \left[ -m^2(\alpha_1 + \alpha_2) + k^2\alpha_2 - \frac{\alpha_2^2 k^2}{\alpha_1 + \alpha_2} \right] \right\} \\
& \times \exp \left\{ -i \left[ kz_2 + \frac{z_1^2 + 2z_1 z_2 + z_2^2 - 4\alpha_2 k z_1 - 4\alpha_2 k z_2}{4(\alpha_1 + \alpha_2)} \right] \right\}. \tag{3.22}
\end{aligned}$$

Assim, só nos resta operar as derivadas da eq. (3.18) na exponencial em  $z$  da equação acima,

$$\frac{\partial}{\partial z_2^\nu} \exp(\zeta) = -i \left[ k_\nu + \frac{z_{1\nu} + z_{2\nu} - 2\alpha_2 k_\nu}{2(\alpha_1 + \alpha_2)} \right] \exp(\zeta), \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial}{\partial z_1^\mu} \exp(\zeta) = -i \left[ \frac{z_{1\mu} + z_{2\mu} - 2\alpha_2 k_\mu}{2(\alpha_1 + \alpha_2)} \right] \exp(\zeta), \tag{3.24}$$

com,

$$\zeta = -i \left[ kz_2 + \frac{z_1^2 + 2z_1 z_2 + z_2^2 - 4\alpha_2 k z_1 - 4\alpha_2 k z_2}{4(\alpha_1 + \alpha_2)} \right]. \tag{3.25}$$

Por fim, observamos que

$$\frac{\partial}{\partial z_1^\mu} \frac{\partial}{\partial z_2^\nu} \exp(\zeta) |_{z_2=z_1=0} = -i \frac{g_{\mu\nu}}{2(\alpha_1 + \alpha_2)} + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} k_\mu k_\nu, \tag{3.26}$$

enquanto a contração dos índices  $\mu$  e  $\nu$  nos leva a,

$$\frac{\partial}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial z_2} \exp(\zeta) = \frac{-2i}{(\alpha_1 + \alpha_2)} + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} k^2. \tag{3.27}$$

Usando estes resultados, o tensor na eq.(3.18) torna-se,

$$\begin{aligned}
\Pi'_{\mu\nu}(k) = & 4ie^2 \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \left( \frac{-i}{(4\pi)^2(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \exp \left\{ i \left[ -m^2(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} k^2 \right] \right\} \times \right. \\
& \times \left. \left\{ \frac{2\alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} \left( \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} k^2 - \frac{i}{\alpha_1 + \alpha_2} + m^2 \right) \right\} + reg \right). \tag{3.28}
\end{aligned}$$

Neste resultado notamos termos proporcionais a  $k_\mu k_\nu$  e  $g_{\mu\nu}$ , a ideia então é separar a parte polinomial de forma que consigamos uma expressão que seja invariante de calibre local, daí que a identidade de Ward seja satisfeita. Sendo assim,

$$\Pi'_{\mu\nu}(k) = (k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} k^2) \Pi'(k^2) + \Delta \Pi'_{\mu\nu}. \quad (3.29)$$

Na expressão acima, o primeiro termo a direita é invariante de calibre e satisfaz a eq.(3.10), porém o segundo termo não, embora seja identicamente nulo devido a regularização. Escolhendo  $C_0 = 1$  e  $M_0 = m$  em (3.13),  $\Delta \Pi'_{\mu\nu}$  resulta

$$\begin{aligned} \Delta \Pi'_{\mu\nu} = \frac{e^2}{\pi} g_{\mu\nu} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \sum_{i=0}^N C_i \left[ \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} k^2 + \frac{i}{\alpha_1 + \alpha_2} - M_i^2 \right] \times \\ \times \exp \left\{ i \left[ -M_i^2 (\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} k^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Os termos entre colchetes em (3.30) são similares, de forma que a expressão pode ser simplificada com a introdução de uma variável  $\sigma$ ,

$$\frac{1}{a^2} \left( \frac{b}{a^2} + \frac{i}{a} - c \right) \exp \left[ i \left( \frac{b}{a} - ac \right) \right] = -i\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} \left\{ \frac{1}{a^3 \sigma} \exp \left[ i\sigma \left( \frac{b}{a} - ac \right) \right] \right\} \Big|_{\sigma=1}. \quad (3.31)$$

Logo, a eq.(3.30) fornece

$$\Delta \Pi'_{\mu\nu} = -\frac{e^2}{\pi} g_{\mu\nu} i\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^3} \frac{1}{\sigma} \times \sum_{i=0}^N C_i \exp \left\{ i\sigma \left[ -M_i^2 (\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} k^2 \right] \right\} \Big|_{\sigma=1}. \quad (3.32)$$

Na eq.(3.30) quando alteramos  $\alpha_i$  por um fator de escala  $\alpha'_i = \sigma \alpha_i$ , a derivada torna-se nula. Portanto, isto mostra que o tensor de polarização de vácuo  $\Pi'_{\mu\nu}$  regularizado satisfaz a invariância de calibre local. Assim, nos resta calcular o termo  $\Pi(k^2)$  em (3.28) cuja forma é

$$\Pi'(k^2) = -\frac{2e^2}{\pi} \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^4} \times \sum_{i=0}^N C_i \exp \left\{ i \left[ -M_i^2 (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} k^2 \right] \right\}. \quad (3.33)$$

Introduzindo o fator,

$$1 = \int_0^\infty d\rho \delta(\rho - (\alpha_1 + \alpha_2)), \quad (3.34)$$

e realizando novamente a transformação de escala  $\alpha_i = \rho\beta_i$ , obtemos,

$$\Pi'(k^2) = -\frac{2e^2}{\pi} \int_0^1 d\beta_1 \int_0^1 d\beta_2 \beta_1 \beta_2 \delta(1 - (\beta_1 + \beta_2)) I, \quad (3.35)$$

com,

$$I = \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} \sum_{i=0}^N C_i \exp \left[ i\rho(-M_i^2 + \beta_1 \beta_2 k^2) \right]. \quad (3.36)$$

Sem a regularização, a integral acima é logaritmicamente divergente, portanto devemos escolher as constantes  $C_i$  e  $M_i$  de forma que a integral seja finita. Fazendo a substituição  $t = i\rho(M_i^2 - \beta_1 \beta_2 k^2)$  e considerando o intervalo inferior  $\eta$  no limite  $\eta \rightarrow 0$ ,

$$I = \lim_{\eta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^N C_i \int_{\eta(M_i^2 - \beta_1 \beta_2 k^2)}^\infty \frac{dt}{t} \exp(-t). \quad (3.37)$$

Integrando por partes conseguimos,

$$I = -\lim_{\eta \rightarrow 0} \left( \sum_{i=0}^N C_i \ln \eta \right) - \sum_{i=0}^N C_i \ln \eta (M_i^2 - \beta_1 \beta_2 k^2) + \sum_{i=0}^N C_i \int_0^\infty dt \ln t \exp(-t). \quad (3.38)$$

Escolhemos nossas constantes de forma que,

$$\sum_{i=0}^N C_i = 0, \quad (3.39)$$

o primeiro e o último termo de (3.36) serão nulos, e com a escolha de  $C_0 = 1$  e  $M_0 = m$  resulta

$$I = - \left[ \ln \left( 1 - \beta_1 \beta_2 \frac{k^2}{m^2} \right) + \sum_{i=1}^N C_i \ln \frac{M_i^2}{m^2} + \sum_{i=0}^N C_i \ln m^2 \right]. \quad (3.40)$$

O último termo do resultado acima também é nulo, devido a condição (3.37), então

$$I = - \left[ \ln \left( 1 - \beta_1 \beta_2 \frac{k^2}{m^2} \right) - \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \right], \quad (3.41)$$

com

$$\sum_{i=1}^N C_i \ln \frac{M_i^2}{m^2} = -\ln \frac{\Lambda^2}{m^2}. \quad (3.42)$$

No resultado acima fizemos  $C_1 = -1$  e  $M_1 = \Lambda$ , sendo  $\Lambda$  chamado de momento de *cutoff*. Portanto, a função de polarização  $\Pi'(k^2)$  é

$$\begin{aligned} \Pi'(k^2) &= \frac{2e^2}{\pi} \int_0^1 d\beta \beta(1-\beta) \left\{ 1 - \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \ln \left[ 1 - \beta(1-\beta) \frac{k^2}{m^2} \right] \right\}, \\ &= \frac{2e^2}{\pi} \left\{ -\frac{1}{6} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \int_0^1 d\beta \beta(1-\beta) \ln \left[ 1 - \beta(1-\beta) \frac{k^2}{m^2} \right] \right\}, \\ &\equiv -\frac{e^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \Pi^R(k^2). \end{aligned} \quad (3.43)$$

O termo remanescente  $\Pi^R(k^2)$  pode ser resolvido analiticamente, e para o limite em que  $k^2 \ll m^2$ , obtemos

$$\Pi^R(k^2) = -\frac{e^2}{\pi} \frac{k^2}{m^2} \left( \frac{1}{15} + \frac{1}{140} \frac{k^2}{m^2} + \dots \right). \quad (3.44)$$

Que representa a parte finita que dará contribuição a amplitude de transição na eq.(3.8). Assim, o tensor de polarização de vácuo, regularizado de acordo com a eq.(3.43), consiste de um termo que diverge logicamente com o parâmetro de corte  $\Lambda$  e a parte finita  $\Pi^R(k^2)$ .

### 3.4 Renormalização da Carga Elétrica

Para que possamos compreender o significado dos termos anteriores, analisamos agora a amplitude de transição  $\mathcal{M}_{fi}^{(2)}$  considerando o espalhamento Møller (espalhamento elétron-elétron, especificamente), com a correção radiativa de segunda ordem em  $e$  dada pelo diagrama de polarização de vácuo correspondendo a:

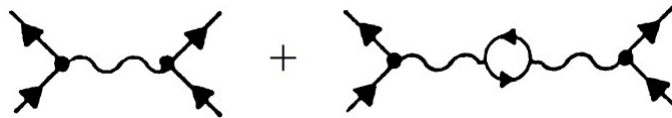


Figura 3.4: Espalhamento Møller com a correção radiativa de ordem mais baixa ao propagador do fóton .

A amplitude de Feynman correspondente a este espalhamento com a contribuição do propagador corrigido é

$$\mathcal{M}_{fi}^{(2)} = (-ie\bar{u}'_1\gamma^\mu u_1)iD'_{F\mu\nu}(k)(-ie\bar{u}'_2\gamma^\mu u_2), \quad (3.45)$$

onde  $iD'_{F\mu\nu}(k)$  é o propagador do fóton modificado, dado pela eq.(3.1). Utilizando o resultado para o tensor de polarização de vácuo, conforme as equações (3.29) e (3.43) obtemos,

$$\mathcal{M}_{fi}^{(2)} = (-ie\bar{u}'_1\gamma^\mu u_1)iD_F^{(0)}(k) \left[ 1 - \frac{e^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \Pi^R(k^2) \right] (-ie\bar{u}'_2\gamma^\mu u_2). \quad (3.46)$$

No limite para  $k^2 \rightarrow 0$ , o propagador do fóton é alterado apenas pelo fator multiplicativo  $Z_3$ , dado por

$$Z_3 = 1 - \frac{e^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}. \quad (3.47)$$

Assim, a amplitude de transição em segunda ordem é,

$$\mathcal{M}_{fi}^{(2)} = Z_3 \mathcal{M}_{fi}^{(1)}. \quad (3.48)$$

A carga elétrica, agora renormalizada, torna-se,

$$e_R^2 = \sqrt{Z_3} e^2. \quad (3.49)$$

Neste resultado,  $e_R$  é a carga física, i.e, a carga que é medida em laboratório, e a carga  $e$  passa então a ser chamada de carga nua, a carga que será vestida pela interação. O termo  $Z_3$  que carrega os infinitos estará incluído na carga regularizada. Dessa forma, ilustramos o fato que a QED é uma teoria renormalizável, i.e., que certos infinitos encontrados nos cálculos das correções radiativas podem ser incorporados nos parâmetros da teoria, e mostramos como isso acontece no caso da carga elétrica.



## 3.5 Regularização Dimensional

### 3.5.1 Introdução

Embora o Método de Pauli-Villars seja eficaz para o tratamento das divergências das correções radiativas na QED e preservando a invariância de calibre, sua limitação surge, por exemplo, no tratamento das divergências nas teorias de calibre não-abelianas, como na cromodinâmica quântica (QCD) e a teoria eletrofraca unificada por Weinberg e Salam em (1967), inviabilizando um esquema de renormalização consistente.

Este obstáculo levou os físicos a investigarem uma nova abordagem para tratar das divergências na TQC, cuja resposta foi fornecida por 't Hooft e Veltman [15][14] com o desenvolvimento de uma técnica que além de preservar a invariância de calibre, respeita a invariância de Lorentz, isto se deu por meio da regularização dimensional.

A regularização dimensional se tornou uma essencial ferramenta na teoria de campos, cuja aplicação não se limitou apenas a QCD e a teoria eletrofraca, mas também na própria QED e outros problemas no qual é possível trabalhar com a mudança da dimensão do espaço-tempo nas integrais divergentes. Na referência [17] trata um exemplo simples de regularização dimensional no problema do potencial elétrico de um fio infinito carregado, com o intuito de ilustrar as principais características do método. No parâmetro atual da física a regularização dimensional assume papel de destaque, como por exemplo em aplicações [18][19] na matéria condensada e na mecânica estatística.

A idéia da regularização dimensional consiste em alterar a dimensão do espaço-tempo das integrais divergentes para um valor  $D$ -dimensões, de forma que a integral se torne convergente, e retomar o limite de  $D$  para a dimensão natural ( $D = 4$ ), para reobter a teoria original. Para uma ilustração do método, consideramos como exemplo a integral com momento  $p$  definido no espaço Euclidiano:

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 + m^2)^2}. \quad (3.50)$$

A integral acima é divergente no limite em que  $p \rightarrow \infty$ . Portanto, na passagem para  $D$  dimensões tomamos

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \rightarrow \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}, \quad (3.51)$$

com os quadrivetores  $p^\mu$  também em  $D$  dimensões, ou seja,

$$p^\mu \equiv (p^0, p^1, \dots, p^{D-1}). \quad (3.52)$$

A integral acima pode ser resolvida (Veja apêndice B), e conduz a

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 + m^2)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{m^2}\right)^{2 - \frac{D}{2}}. \quad (3.53)$$

Note que no resultado (3.53) temos uma função que terá polos em valores de  $D = 4, 6, 8, \dots$ , sendo  $D = 4$  o valor para o qual a integral retorna sua condição divergente. Assim, próximo de  $D = 4$  fazemos,

$$D = 4 - \eta, \quad (3.54)$$

onde  $\eta \ll 1$ . A idéia é que, podemos realizar uma expansão em série de Taylor nos termos que contém  $\eta$ ,

$$\Gamma(-n + \eta) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[ \frac{1}{\eta} + \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma\right) + O(\eta) \right]. \quad (3.55)$$

Assim,

$$\lim_{D \rightarrow 4} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 + m^2)^2} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{2}{\eta} - \ln m^2 - \gamma + \ln(4\pi) + O(\eta) \right). \quad (3.56)$$

No resultado acima, o termo  $2/\eta$  é divergente, e  $\gamma \approx 0,577$  é a constante de Euler.

### 3.5.2 Tensor de polarização de vácuo

O tensor de polarização de vácuo (3.4) em  $D$ -dimensões é escrito como

$$ie^2 \Pi^{\mu\nu}(k) = \frac{-e^2}{(2\pi)^4} \int d^D p \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu(\not{p} + \not{k} + m)\gamma^\nu(\not{p} + m)]}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)[(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon]}. \quad (3.57)$$

onde  $\not{p} = p^\mu \gamma_\mu$ . Para o cálculo do traço acima, devemos notar que em  $D$ -dimensões,  $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = D$ . Assim, as eqs. (A.7) e (A.12) são escritas como,

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = Dg^{\mu\nu}, \quad (3.58)$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = D(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}). \quad (3.59)$$

Logo,

$$\text{Tr}[\gamma_\mu(\not{p} + m)\gamma_\nu(\not{p} - k + m)] = D[p_\mu(p - k)_\nu + p_\nu(p - k)_\mu - g_{\mu\nu}(p^2 - k \cdot p - m^2)]. \quad (3.60)$$

Assim, a eq.(3.57) resulta

$$ie^2 \Pi_{\mu\nu}(k) = -ie^2 D \int \frac{d^D p}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{p_\mu(p - k)_\nu + p_\nu(p - k)_\mu - g_{\mu\nu}(p^2 - k \cdot p - m^2)}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)[(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon]} \right\}. \quad (3.61)$$

Podemos reescrever a equação acima utilizando uma identidade conhecida como parametrização de Feynman,

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{[b + (a - b)z]^2}. \quad (3.62)$$

Consequentemente

$$\frac{1}{[(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon](p^2 - m^2 + i\epsilon)} = \int_0^1 \frac{dz}{[p^2 - m^2 + (k^2 - 2pk)z + i\epsilon]^2}. \quad (3.63)$$

Logo, escrevemos (3.61) como segue

$$ie^2 \Pi_{\mu\nu}(k) = -ie^2 D \int_0^1 dz \int \frac{d^D p}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{p_\mu(p - k)_\nu + p_\nu(p - k)_\mu - g_{\mu\nu}(p^2 - k \cdot p - m^2)}{[p^2 - m^2 + (k^2 - 2pk)z + i\epsilon]^2} \right\}. \quad (3.64)$$

Introduzimos a nova variável  $q = p - kz$ , a eq.(3.64) torna-se

$$ie^2 \Pi_{\mu\nu}(k) = \frac{-e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dz \int d^D q \frac{N_{\mu\nu}(q + kz, k)}{[q^2 + k^2 z(1 - z) - m^2 + i\epsilon]}, \quad (3.65)$$

com,

$$N_{\mu\nu}(q + kz, k) = D \left\{ [2q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}] + m^2 - k^2 z(1-z) g_{\mu\nu} + [-2z(1-z)(k_\mu k_\nu - k^2 g_{\mu\nu})] \right\}. \quad (3.66)$$

Os termos lineares em  $q$  foram omitidos, devido ao fato que ao serem integrados darão resultados nulos, isto é observado de acordo as integrais (Apêndice B) reescritas como

$$(i) \int d^D q \frac{1}{(q^2 + s + i\epsilon)^n} = i\pi^{D/2} \frac{\Gamma(n - \frac{1}{2}D - 1)}{2\Gamma(n)} \frac{1}{s^{n-D/2}}, \quad (3.67)$$

$$(ii) \int d^D q \frac{q_\mu}{(q^2 + s + i\epsilon)^n} = 0, \quad (3.68)$$

$$(iii) \int d^D q \frac{q_\mu q_\nu}{(q^2 + s + i\epsilon)^n} = i\pi^{D/2} \frac{\Gamma(n - \frac{1}{2}D - 1)}{2\Gamma(n)} \frac{g_{\mu\nu}}{s^{n-D/2-1}}, \quad (3.69)$$

$$(iv) \int d^D q \frac{q^2}{(q^2 + s + i\epsilon)^n} = i\pi^{D/2} \frac{\Gamma(n - \frac{1}{2}D - 1)}{2\Gamma(n)} \frac{D}{s^{n-D/2-1}}. \quad (3.70)$$

Dessa forma, rescrevemos  $ie^2\Pi_{\mu\nu}$

$$ie^2\Pi_{\mu\nu}(k) = \frac{-e^2}{(2\pi)^4} D \int_0^1 dz \sum_{i=1}^3 I_i^{\mu\nu}(k, z), \quad (3.71)$$

que, de acordo com a identidades (3.67), (3.69) e (3.70),

$$\begin{aligned} I_1^{\mu\nu}(k, z) &\equiv \int d^D q \frac{(2q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu})}{[q^2 + k^2 z(1-z) - m^2 + i\epsilon]^2} \\ &= \frac{ig_{\mu\nu}\pi^{D/2}\Gamma(1-D/2)}{[k^2 z(1-z) - m^2]^{1-D/2}} (1-D/2), \end{aligned} \quad (3.72)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} I_2^{\mu\nu}(k, z) &\equiv [m^2 - k^2 z(1-z)] g_{\mu\nu} \int d^D q \frac{1}{[q^2 + k^2 z(1-z) - m^2 + i\epsilon]^2} \\ &= [m^2 - k^2 z(1-z)] g_{\mu\nu} \frac{i\pi^{D/2}\Gamma(2-D/2)}{[k^2 z(1-z) - m^2]^{2-D/2}} \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$= -I_1^{\mu\nu}(k, z), \quad (3.74)$$

e

$$I_3^{\mu\nu}(k, z) \equiv -2z(1-z)(k_\mu k_\nu - k^2 g_{\mu\nu}) \int d^D q \frac{1}{[q^2 + k^2 z(1-z) - m^2 + i\epsilon]^2} - 2z(1-z)(k_\mu k_\nu - k^2 g_{\mu\nu}) \frac{i\pi^{D/2} \Gamma(2-D/2)}{[k^2 z(1-z) - m^2]^{2-D/2}}. \quad (3.75)$$

Substituindo estes resultados em (3.70), conseguimos

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = (k_\mu k_\nu - k^2 g_{\mu\nu}) \Pi(k^2), \quad (3.76)$$

que é o mesmo resultado alcançado usando o método de Pauli-Villars. Sendo assim observamos que a regularização dimensional satisfaz também a invariância de calibre na QED. Porém, o termo  $\Pi(k^2)$  assume a forma,

$$\Pi(k^2) = \frac{D\Gamma(2-D/2)}{2^3 \pi^{(4-D/2)}} \int_0^1 dz \frac{z(1-z)}{[k^2 z(1-z) - m^2]^{2-D/2}} \quad (3.77)$$

Dado que  $D = 4 - \eta$ , e utilizando o resultado da eq.(3.55) para expandir a função  $\Gamma(\eta)$ , obtemos

$$\Pi(k^2) = \frac{1}{12\pi^2} \left( \frac{2}{\eta} - \gamma - \ln(-m^2) \right) + \Pi^R(k^2). \quad (3.78)$$

O termo divergente  $2/\eta$ , quando comparado com a expressão obtida pelo método de Pauli-Villars, nos leva a perceber a divergência logarítmica associada, ou seja

$$\frac{2}{\eta} \rightarrow \ln \Lambda^2. \quad (3.79)$$

Uma vez que as quantidades físicas de interesse nos processos de espalhamento são finitas nas amplitudes de transição, para eliminar estas divergências calculamos a expressão,

$$\Pi_f(k^2) \equiv \Pi(k^2) - \Pi(0). \quad (3.80)$$

Isso resulta em,

$$\Pi_f(k^2) = \Pi^R(k^2), \quad (3.81)$$

que não depende de nenhum parâmetro regularizador  $\eta$  e é o resultado finito obtido na eq.(3.44).

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentamos neste trabalho alguns elementos da Eletrodinâmica Quântica, cuja solução perturbativa faz surgir resultados infinitos nas correções radiativas, que leva a necessidade de adotar esquemas de regularização e renormalização para tratar as divergências.

Mostramos como identificar as divergências proveniente da polarização de vácuo, que realiza uma correção radiativa no propagador do fóton alterando o valor da carga elétrica. Isto foi feito segundo dois métodos de regularização: o de Pauli-Villars, cujo parâmetro regularizador  $\Lambda$  surge como uma divergência logartimica, e a Regularização Dimensional, onde os infinitos são identificados como função de  $\frac{1}{\eta}$ , que comparando com o método de Pauli-Villars percebemos a divergência logarítmica associada.

Com as divergências identificadas, utilizamos o procedimento de renormalização para subtrair as quantidades infinitas que não dão contribuição para as amplitudes de transição. Para isto a divergência é incorporada à carga elétrica  $e$ , que não é observável devido à blindagem causada pela polarização de vácuo. Assim, a carga renormalizada  $e_R$  é a medida em laboratório, sendo a carga elementar do elétron.

Desta forma percebemos que ambos os métodos são eficazes na QED, satisfazendo a invariância de calibre constatada pela identidade de Ward. Porém a regularização dimensional tem a vantagem de ser mais simples e intuitiva em relação a outros métodos presentes na literatura.

O sucesso da regularização dimensional possibilitou um grande avanço da TQC, tornando uma ferramenta essencial nos cálculos em teoria de campos e em outras áreas, como a física da matéria condensada e a mecânica estatística.

## Referências Bibliográficas

- [1] DYSON F.J. *The S Matrix in Quantum Electrodynamics*. Physical Review, Vol. 75, No. 11, June, 1949.
- [2] FEYNMAN R.P. *Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics*. Physical Review, Vol. 76, No. 6, September, 1949.
- [3] TOMONAGA S.; FUKUDA H.; MIYAMOTO Y. *A Self-Consistent Subtraction Method in the Quantum Field Theory. II*. Progress of Theoretical Physics Vol. IV, No.1 Mar., 1949.
- [4] RYDER L.H. *Quantum Field Theory*. New York: University of Cambridge, 1995.
- [5] LEMOS N. *Mecânica Analítica*. 2nd ed. Livraria da Física, 2007.
- [6] DIRAC P.A.M. *The Quantum Theory of The Emission and Absorption of Radiation*. Proc. Roy. Soc.,A114,243, 1927.
- [7] MAGGIORE M. *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*. New York: Oxford, 2005.
- [8] MANDL F.; SHAW, G. *Quantum Field Theory*. 2nd ed., John Wiley and Sons, 2010.
- [9] VILLARS F.; PAULI W. *On the Invariant Regularization in Relativistic Quantum Theory*. Reviews of Modern Physics, Vol.21, No. 3, July, 1949.
- [10] GREINER W.; REINHARDT, J. *Quantum electrodynamics*. 4th ed., Berlin: Springer, 1995.
- [11] LEIBBRANDT G. *Introduction to the technique of dimensional regularization*. Reviews of Modern Physics, Vol.47, No. 4, October, 1975.
- [12] J.J GONZALES A.; BOLLINI C.G, GAMBIAGI. Nuovo Cimento, 31 (1964), p. 550.



- [13] E.R. SPEER. *J. Math. Phys.* 15.1, 1969.
- [14] 't HOOFT G.; VELTMAN M. *Regularization and Renormalization of Gauge Fields*. Nuclear Physics. North-Holland Publishing Company. 189-213, B44, 1972.
- [15] 't HOOFT G. *Dimensional regularization and the renormalization group*. Nuclear Physics. North-Holland Publishing Company. 444-468, B61, 1973.
- [16] PESKIN M.E.; SHROEDER, D.V. *Introduction to Quantum Field Theory*. 4th ed., Colorado: Westview Press, 1995.
- [17] OLNESS F.; SCALISE R. *Regularization, Renormalization, and Dimensional Analysis*. arXiv:hep-ph/0812.3578v 18 Dec, 2008.
- [18] LEE S.; DALIDOVICH D. *Perturbative non-Fermi liquids from dimensional regularization*. <http://arxiv.org/abs/1307.3170v3>, 2013.
- [19] FERRI G.L.; ROCCA M.C, PLASTINO A. *Dimensional Regularization in Non-extensive Statistical Mechanics*. <http://arxiv.org/abs/1404.0418v1>, 2013.
- [20] BJORKEN J.; DRELL, S. *Relativistic Quantum Mechanics*. 1964, McGraw-Hill Book Company, 1964.
- [21] M. KAKU. *Quantum Field Theory: A Modern Introduction*. 1964, McGraw-Hill Book Company, 1964.

# Matrizes de Dirac

As matrizes de Dirac  $(\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$  são,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

com  $\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^i)$ . O conjunto destas matrizes  $\gamma$  obedecem a relação de anti-comutação,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.3})$$

este resultado é conhecido como algebra de Clifford. Temos que  $g^{\mu\nu}$  é o tensor métrico dado por,

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Com a relação de anti-comutação (A.3) obtemos os resultados,

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu \gamma_\mu &= g^{\mu\nu} \gamma_\nu \gamma_\mu \\
&= g^{\mu\nu} (2g_{\mu\nu} - \gamma_\mu \gamma_\nu) \\
&= 2g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma_\nu,
\end{aligned}$$

temos que  $\gamma^\mu \gamma_\mu = \gamma^\nu \gamma_\nu = \gamma^2$ , logo

$$\gamma^2 = 2g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4. \quad (\text{A.5})$$

Com este resultado podemos calcular

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma^\mu &= (2g_{\mu\nu} - \gamma_\nu \gamma_\mu) \gamma^\mu \\
&= 2\gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma^\mu \\
&= 2\gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma^2 \\
&= -2\gamma_\nu.
\end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

O traço do produto das matrizes  $\gamma$  é,

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu (2g^{\rho\sigma} - \gamma^\sigma \gamma^\rho)] \\
&= 2g^{\rho\sigma} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) - \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\rho) \\
&= 8g^{\rho\sigma} g^{\mu\nu} - \text{Tr}[\gamma^\mu (2g^{\nu\sigma} - \gamma^\sigma \gamma^\nu) \gamma^\rho] \\
&= 8g^{\rho\sigma} g^{\mu\nu} - 2g^{\nu\sigma} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\rho) + \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho)
\end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

obtemos,

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 8g^{\rho\sigma} g^{\mu\nu} - 8g^{\nu\sigma} g^{\mu\rho} + 8g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} - \text{Tr}(\gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho). \quad (\text{A.9})$$

O traço é invariante por uma permutação cíclica, i.e,

$$\text{Tr}(ABCD) = \text{Tr}(DABC) = \text{Tr}(CDAB) = \text{Tr}(BCDA). \quad (\text{A.10})$$

logo,

$$\text{Tr}(\gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho) = \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma). \quad (\text{A.11})$$

Assim, (A.8) pode ser escrito como,

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}). \quad (\text{A.12})$$

# Integrais em D-dimensões

As integrais divergentes em D-dimensões são da forma,

$$I_1(q) = \int d^D p \frac{1}{(p^2 + 2pq - m^2)^\alpha}, \quad (\text{B.1})$$

$$I_2(q) = \int d^D p \frac{p_\mu p_\nu}{(p^2 + 2pq - m^2)^\alpha}, \quad (\text{B.2})$$

$$I_3(q) = \int d^D p \frac{p^2}{(p^2 + 2pq - m^2)^\alpha}. \quad (\text{B.3})$$

Com uma dimensão temporal e  $(D - 1)$  dimensões espaciais, onde  $p = (p_0, \mathbf{r})$ . Transformando em coordenadas polares, temos

$$(p_0, \mathbf{r}) \rightarrow (p_0, r, \phi, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{D-3}). \quad (\text{B.4})$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d^D p &= dp_0 r^{D-2} dr d\phi \sin \theta_1 d\theta_1 \sin^2 \theta_2 d\theta_2 \dots \sin^{D-3} \theta_{D-3} d\theta_{D-3} \\ &= dp_0 r^{D-2} dr d\phi \prod_{k=1}^{D-3} \sin^k \theta_k d\theta_k. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Com intervalos de integração compreendidos em,

$$(-\infty < p_0 < \infty, 0 < r < \infty, 0 < \phi < 2\pi, 0 < \theta_i < \pi), \quad (\text{B.6})$$

onde  $i = 1, 2, \dots, D - 3$ .

Logo, a integral  $I_1(q)$  torna-se,

$$I_1(q) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \int_0^{\infty} r^{D-2} dr \int_0^\pi \frac{\prod_{k=1}^{D-3} \sin^k \theta_k d\theta_k}{(p^2 + 2pq - m^2)^\alpha}. \quad (\text{B.7})$$

A integral acima pode ser reescrita em termos de funções gama, onde

$$\int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2x-1} (\cos \theta)^{2y-1} d\theta = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (\text{B.8})$$

Comparando com (B.7), temos que  $y = \frac{1}{2}$  e  $x = \frac{k+1}{2}$ , com  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ . Assim,

$$\int_0^{\pi} (\sin \theta)^k d\theta = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}, \quad (\text{B.9})$$

obtemos,

$$I_1(q) = \frac{2\pi^{(D-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \int_0^{\infty} \frac{r^{D-2} dr}{(p_0^2 - r^2 + 2pq - m^2)^\alpha}. \quad (\text{B.10})$$

A integral acima é invariante de Lorentz. Portanto no referencial  $q_\mu = (\mu, \mathbf{0})$  temos que  $2pq = 2\mu p_0$ . Realizando uma mudança de variável para  $p'_\mu = p_\mu + q_\mu$ , implica que,

$$p_0'^2 - q^2 = p_0^2 + 2\mu p_0. \quad (\text{B.11})$$

$I_1(q)$  se torna,

$$I_1(q) = \frac{2\pi^{(D-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0' \int_0^{\infty} \frac{r^{D-2} dr}{[p_0'^2 - r^2 - (q^2 + m^2)]^\alpha}. \quad (\text{B.12})$$

A função Beta de Euler é,

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = 2 \int_0^{\infty} dt t^{2x-1} (1+t^2)^{-x-y}. \quad (\text{B.13})$$

Fizemos,  $x = \frac{1+\beta}{2}$ ,  $y = \alpha - \frac{1+\beta}{2}$  e  $t = \frac{s}{M}$ . O que temos é,

$$\int_0^{\infty} ds \frac{s^\beta}{(s^2 + M^2)^\alpha} = \frac{\Gamma\left(\frac{1+\beta}{2}\right) \Gamma\left(\alpha - \frac{1+\beta}{2}\right)}{2(M^2)^{\alpha-(1+\beta)/2} \Gamma(\alpha)}. \quad (\text{B.14})$$

Comparando com (B.10), temos que  $\beta = D - 2$ ,  $M^2 = -p_0'^2 + q^2 + m^2$ .  $I_1(q)$  torna-se,

$$\begin{aligned}
 I_1(q) &= \frac{2\pi^{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)} (-1)^{-\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} dp'_0 \frac{\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right) \Gamma\left(\alpha - \frac{D-1}{2}\right)}{2(q^2 + m^2 - p_0'^2)^{\alpha - (D-1)/2} \Gamma(\alpha)}, \\
 &= (-1)^{-\alpha} \pi^{(D-1)/2} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{D-1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'_0}{(q^2 + m^2 - p_0'^2)^{\alpha - (D-1)/2}}, \\
 &= (-1)^{2\alpha + \frac{D-1}{2}} \pi^{(D-1)/2} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{D-1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'_0}{[p_0'^2 - (q^2 + m^2)]^{\alpha - (D-1)/2}}. \quad (\text{B.15})
 \end{aligned}$$

Para resolver a integral acima, usamos novamente o resultado em (B.14). Portanto,

$$I_1(q) = (-1)^\alpha i\pi^{D/2} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{D-1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{[q^2 + m^2]^{\alpha - (D-1)/2}}. \quad (\text{B.16})$$

A solução de (B.1) pode ser escrita como,

$$\int d^D p \frac{1}{(p^2 + 2pq - m^2)^\alpha} = (-1)^{D/2} i\pi^{D/2} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{D-1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{[-q^2 - m^2]^{\alpha - (D-1)/2}}. \quad (\text{B.17})$$

Para alcançar os resultados de (B.2) e (B.3), derivamos a equação acima em relação a  $q^\mu$ , obtemos

$$-\alpha \int d^D p \frac{2p_\mu}{(p^2 + 2pq - m^2)^{\alpha+1}} = (-1)^{D/2} i\pi^{D/2} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{D-1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \frac{2q_\mu}{[-q^2 - m^2]^{\alpha - (D-1)/2}}. \quad (\text{B.18})$$

Usando a propriedade da função gamma  $\beta\Gamma(\beta) = \Gamma(\beta + 1)$  e fazendo a passagem de  $\alpha \rightarrow \alpha + 1$ , obtemos

$$\int d^D p \frac{p_\mu}{(p^2 + 2pq - m^2)^\alpha} = (-1)^{1+D/2} i\pi^{D/2} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{D-1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \frac{q_\mu}{[-q^2 - m^2]^{\alpha - (D-1)/2}}. \quad (\text{B.19})$$

E agora derivando em relação a  $q^\nu$ , obtemos

$$\int d^D p \frac{p_\mu p_\nu}{(p^2 + 2pq - m^2)^\alpha} = (-1)^{D/2} \frac{i\pi^{D/2}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(-q^2 - m^2)^{\alpha - D/2}} \times \\ \times \left[ q_\mu q_\nu \Gamma\left(\alpha - \frac{D}{2}\right) + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (-q^2 - m^2) \Gamma\left(\alpha - 1 - \frac{D}{2}\right) \right], \quad (\text{B.20})$$

que é o resultado para (B.2).

Em D-dimensões temos que  $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = D$ . Portanto, o termo  $p_\mu p_\nu$  no integrando em (B.20) passam a ser,

$$p_\mu p_\nu \rightarrow \frac{1}{D} p^2 g_{\mu\nu}, \quad (\text{B.21})$$

e

$$q_\mu q_\nu \rightarrow \frac{1}{D} q^2 g_{\mu\nu}. \quad (\text{B.22})$$

Logo, solução de (B.3) torna-se

$$\int d^D p \frac{p^2}{(p^2 + 2pq - m^2)^\alpha} = (-1)^{D/2} \frac{i\pi^{D/2}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(-q^2 - m^2)^{\alpha - D/2}} \times \\ \times \left[ q^2 \Gamma\left(\alpha - \frac{D}{2}\right) + \frac{D}{2} (-q^2 - m^2) \Gamma\left(\alpha - 1 - \frac{D}{2}\right) \right]. \quad (\text{B.23})$$



